FMI Prova 1

14 outubro, 2021

- Esta prova tem um total de 12 pontos. Você tem 2 horas para terminá-la, e não pode utilizar nenhuma referência (livros, notas, celulares, etc).
- Informações que podem ser úteis:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty dt f(t) e^{-st}$$
$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$
$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$
$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$
$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$
$$g_{\text{impar}}(x) \equiv \sum_{n=1}^\infty b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g_{\text{impar}}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-ikx} f(x)$$
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^\infty dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k)$$
$$\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}k^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ikx} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos(nx)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\operatorname{sen}(nx)$$

1. [**2,0** pontos em total] Seja $f(t)$ uma função e seja $g(t) = e^{at} f(t)$ (com a constante).
   (a) [**1,0** ponto] Escreva uma relação entre a transformada de Laplace de $g(t)$ ($G(s) \equiv \mathcal{L}\{g(t)\}$) e a transformada de Laplace de $f(t)$ ($F(s) \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}$).
   (b) [**1,0** ponto] Calcule a transformada de Laplace da função $g(t) = e^{at}\cos(kt)$.

2. [**2,0** pontos em total] Seja $f(x)$ uma função e seja $g(x) = e^{iax} f(x)$ (com a constante).
   (a) [**1,0** ponto] Escreva uma relação entre a transformada de Fourier de $g(x)$ ($\tilde{g}(k)$) e a transformada de Fourier de $f(x)$ ($\tilde{f}(k)$)
   (b) [**1,0** ponto] Calcule a transformada de Fourier da função $g(x) = e^{iax} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$

3. [**1,5** pontos] Determine a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \frac{2s-4}{s^2-4s+20}$$

4. [**3,0** pontos] Uma corda de comprimento L vibra presa nas suas extremidades $x = 0$ e $x = L$. O movimento é descrito pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}.$$

Supondo que a solução seja da forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

determine os coeficientes $b_n(t)$ considerando as condições iniciais

$$u(0,x) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$$

5. [**3,5** pontos em total] Seja a integral Gaussiana,

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} \tag{1}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2}$$

para $a > 0$.

(a) [**1,0** ponto] Tome a derivada $\dfrac{dI(a)}{da}$ das ambas expressões (1) e (2).

(b) [**1,5** ponto] Considere a função

$$f(x) = x^{2n}\, e^{-ax^2}$$

onde novamente $a > 0$ e n é um número inteiro positivo qualquer. Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)$$

(c) [**1,0** ponto] A transformada de Fourier de $f(x)$ existe para qualquer n? Explica.