# **Soluções:**
# FisMat I Exercicios 7

Prazo: 28 novembro 2021

1. Seja $P_n(x)$ o n-ésimo polinômio de Legendre. Prove que $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$. Mostre então que $\int_x^1 P_n(x) = [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]/(2n+1)$.
2. Calcule o valor da integral $\int_{-1}^1 dx\, x^n\, P_n(x)$

---

A função geratriz é

$$L(x,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \tag{1}$$

Define um variável $s$ tal que

$$s \equiv \frac{1-\sqrt{1-2tx+t^2}}{t} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \; x = \frac{1+t^2-(t-ts)^2}{2t} \tag{3}$$

$$= s + \frac{t}{2}\left(1-s^2\right) \tag{4}$$

Então, temos

$$\frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{dx}{1-ts} \tag{5}$$

$$= \frac{1+t(-s)}{1-ts} ds \tag{6}$$

$$= ds \tag{7}$$

e podemos fazer a integral

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^m L(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} dx\, x^m P_n(x) \tag{8}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^m dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \tag{9}$$

$$= \int_{-1}^{1} ds \left[ s + \frac{t}{2}\left(1-s^2\right) \right]^m \tag{10}$$

Usando o Binómio de Newton, podemos escrever

$$\int_{-1}^{1} ds \left[ s + \frac{t}{2}\left(1-s^2\right) \right]^m = \int_{-1}^{1} ds \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} s^{m-n} \left[ \frac{t}{2}\left(1-s^2\right) \right]^n \tag{11}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} t^n \binom{m}{n} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} ds\, s^{m-n}(1-s^2)^n \tag{12}$$

Comparando (8) e (12), a integral desejada é então

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^m P_n(x) = \begin{cases} \binom{m}{n} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} ds\, s^{m-n}(1-s^2)^n & m \leq n \\ 0 & m > n \end{cases} \tag{13}$$

Podemos ver também que é necessário que $m - n$ é par.

Para $m = n$, temos

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^n P_n(x) = \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} ds\, (1-s^2)^n \tag{14}$$

$$= \frac{2}{2^n} \int_{0}^{1} ds\, (1-s^2)^n \tag{15}$$

$$= 2^{1-n} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1))}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \tag{16}$$

$$= 2^{-n} \frac{\sqrt{\pi} n!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \tag{17}$$

$$= 2^{-n} \frac{n! 4^n n!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)(2n)!} \tag{18}$$

$$= \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \tag{19}$$

Ou, equivalentemente

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^n P_n(x) = \frac{2n!}{(2n+1)!!} \tag{20}$$

---

3. Obtenha a expansão em série de Legendre da função $f(x) = |x|$ no intervalo $-1 < x < 1$.

---

A função pode ser escrito num série de Legendre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{21}$$

com

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} dx f(x) P_n(x) \tag{22}$$

$$= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x| P_n(x) dx \tag{23}$$

Para $n$ impar, o polinômio $P_n$ é impar

$$P_{2m+1}(-x) = -P_{2m+1}(x) \tag{24}$$

e a integral se anula

$$c_{2m+1} = 0, \quad m \in 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Para $n$ par, temos

$$c_{2m} = (4m+1) \int_{0}^{1} x P_{2m}(x) dx \tag{26}$$

Lembramos a relação de recorrência

$$(n+1) P_{n+1}(x) = x(2n+1) P_n(x) - n P_{n-1}(x) \tag{27}$$

$$\implies x P_{2m}(x) = \frac{(2m+1) P_{2m+1}(x) + 2m P_{2m-1}(x)}{(4m+1)} \tag{28}$$

A coeficiente é

$$c_{2m} = (2m+1)\int_0^1 P_{2m+1}(x)dx + 2m\int_0^1 P_{2m-1}(x)dx \tag{29}$$

A integral de um polinômio é

$$\int_0^1 dx\, P_{2m}(x) = 0 \tag{30}$$

$$\int_0^1 dx\, P_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m+2)!!} \tag{31}$$

Então,

$$c_{2m} = (2m+1)\frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m+2)!!} + 2m\frac{(-1)^{m-1}(2m-3)!!}{(2m)!!} \tag{32}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & m=0 \\ \frac{(-1)^{m+1}(4m+1)}{2^{2m}(m-1)!}\frac{(2m-2)!}{(m+1)!} & m>0 \end{cases} \tag{33}$$

A série inteira é então

$$|x| = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}P_{2m}(x) \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(4m+1)}{2^{2m}(m-1)!}\frac{(2m-2)!}{(m+1)!}P_{2m}(x) \tag{35}$$

---

4. [**Potencial de um anel uniformemente carregado**] Determine o potencial elétrico $\phi(r,\theta)$ produzido no vácuo por um anel unidimensional de raio $R$, uniformemente carregado com carga elétrica total $Q$ e densidade linear de carga $\lambda = Q/(2\pi R)$, nas seguintes regiões:

   (a) $r > R$.

   (b) $r < R$.

   (c) $r = R$, mas $\theta \neq \pi/2$.

   As variáveis $r$ e $\theta$ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do anel e cujo eixo $z$, a partir de onde o ângulo $\theta$ é medido, coincide com o eixo de simetria do anel.

*Sugestão 1.* Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução da equação de Laplace:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \tag{36}$$

Os coeficientes $A_n$ e $B_n$ são fixados pela solução ao longo do eixo de simetria (que correspondem a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$).

*Sugestão 2.* Para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, vale a expansão binomial:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-k)_k}{k!} x^k, \tag{37}$$

onde, para $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(y)_n$ são os chamados símbolos de Pochhammer. Em particular, para $|t| < 1$, tem-se

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k, \tag{38}$$

com

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \tag{39}$$

---

A carga fica na região $\theta = \pi/2$ e $r = R$.

Todas as outras regiões ficam sem carga e a potencial elétrico $\phi$ satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi(r,\theta) = 0 \tag{40}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \tag{41}$$

O problema tem uma simetria rotacional, e então, $\phi$ não depende do angulo azimutal.

Usando separação de variáveis:

$$\phi(r,\theta) = R(r)T(\theta) \tag{42}$$

$$\frac{1}{Rr^2} \left( r^2 R' \right)' = -\frac{1}{Tr^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen}\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \text{const} = \ell^2 \tag{43}$$

A equação angular é a equação de Legendre. As soluções são os polinômios de Legendre

$$T(\theta) = P_\ell(\cos\theta), \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots \tag{44}$$

Para cada valor de $\ell$, as soluções da equação radial são $r^\ell$ e $r^{-\ell-1}$

A solução geral é

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \tag{45}$$

Ao longo do eixo de simetria, $\cos\theta = 1$ e $P_\ell(\cos\theta) = 1$.

$$\phi(r,0) = \phi(r,\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) \tag{46}$$

Ao longo do eixo de simetria, a distancia a um ponto no anel é $\sqrt{z^2+R^2} = \sqrt{r^2+R^2}$, e a potencial é

$$\psi(r,0) = \frac{kQ}{\sqrt{r^2+R^2}} \tag{47}$$

onde $k$ é a constante de Coulomb

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{48}$$

Usando sugestão 2, podemos escrever

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^n, \quad t < 1 \tag{49}$$

$$(r^2+R^2)^{-1/2} = R^{-1}(1+\frac{r^2}{R^2})^{-1/2} \tag{50}$$

$$= R^{-1} + R^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^n, \qquad r < R \tag{51}$$

$$(r^2+R^2)^{-1/2} = r^{-1}(1+\frac{R^2}{r^2})^{-1/2} \tag{52}$$

$$= r^{-1} + r^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^n, \qquad r > R \tag{53}$$

com

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \tag{54}$$

A potencial na região $r < R$ é

$$\psi(r,0) = \frac{kQ}{\sqrt{r^2+R^2}} \tag{55}$$

$$= \frac{kQ}{R}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^n\right] \tag{56}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \tag{57}$$

Para $n$ impar, os coeficientes são zero

$$A_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{58}$$

Isso é claro por que o problema tem uma simetria de paridade $r \to -r$.

Os coeficientes pares são

$$A_0 = \frac{kQ}{R} \tag{59}$$

$$A_{2n} = \frac{kQ}{R}\frac{\alpha_n}{R^{2n}} \tag{60}$$

$$= (-1)^n \frac{kQ(2n-1)!!}{R^{2n+1}(2n)!!}, \quad n = 1, 2, 3\dots \tag{61}$$

Com todos os coeficientes já determinados, a solução nesta região é

$$\phi(r, \theta) = \frac{kQ}{R} P_0(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \tag{62}$$

$$= \frac{kQ}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{kQ(2n-1)!!}{R^{2n+1}(2n)!!} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \tag{63}$$

$$= \frac{kQ}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{Q(2n-1)!!}{4\pi\epsilon_0 R^{2n+1}(2n)!!} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \tag{64}$$

A potencial na região $R < r$ é

$$\psi(r, 0) = \frac{kQ}{\sqrt{r^2 + R^2}} \tag{65}$$

$$= \frac{kQ}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^n\right] \tag{66}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} \tag{67}$$

De novo os coeficientes impares são zero $B_{2n+1} = 0$. Os coeficientes pares são

$$B_0 = kQ \tag{68}$$

$$B_{2n} = kQR^{2n}\alpha_n \tag{69}$$

$$= (-1)^n \frac{kQR^{2n}(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n = 1, 2, 3\dots \tag{70}$$

A potencial na região $R = r$ é

$$\psi(R,0) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+R^2}} \tag{71}$$
$$= \frac{kQ}{\sqrt{2}R} \tag{72}$$

A solução geral (em todos as regiões sem carga) é

$$\phi(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} \frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{R^{2n+1}(2n)!!} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta) & r < R \\ \frac{1}{\sqrt{2}R} & r = R \\ \frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{R^{2n}(2n-1)!!}{(2n)!!} r^{-2n} P_{2n}(\cos\theta) & r > R \end{cases} \tag{73}$$

---

5. [**Corda pendurada**] Determine a solução da equação da corda pendurada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{74}$$

onde $g > 0$, que descreve o movimento de pequenas oscilações de uma corda de comprimento $L$ localizada, quando em repouso, no intervalo $0 \leq z \leq L$ do eixo vertical, pendurada pelo seu extremo superior (o que corresponde à condição de contorno $u(L,t) = 0$ para todo $t$) e com condições iniciais

$$u(z,0) = u_0(z) \tag{75}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(z,0) = v_0(z), \tag{76}$$

para certas funções $u_0$ e $v_0$ dadas.

*Sugestão*: A equação diferencial

$$zU''(z) + U'(z) + \lambda^2 U(z) = 0 \tag{77}$$

pode ser transformada na equação de Bessel de ordem zero

$$\zeta^2 y''(\zeta) + \zeta y'(\zeta) + \zeta^2 y(\zeta) = 0 \tag{78}$$

através das definições

$$\zeta = \sqrt{4\lambda^2 z} \tag{79}$$

$$U(z) = y(\zeta) = y(\sqrt{4\lambda^2 z}). \tag{80}$$

---

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{81}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gz\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g\frac{\partial u}{\partial z} \tag{82}$$

A equação é separável. Usando separação de variáveis:

$$u(z,t) = U(z)T(t) \tag{83}$$

$$U\frac{d^2 T}{\partial t^2} = gzT\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + gT\frac{\partial U}{\partial z} \tag{84}$$

$$\implies \frac{d^2 T}{dt^2} = -CT(t) \tag{85}$$

$$z\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{dU}{dz} = -\frac{C}{g}U(z), \tag{86}$$

para algum constante $C$.

A solução geral da função de $t$, é

$$T(t) = e^{i\lambda t}, \tag{87}$$

onde $\lambda$ não é necessariamente real, e $C = \lambda^2$.

A equação para $U$ pode ser transformada na equação de Bessel de ordem zero

$$\zeta = \sqrt{\frac{4Cz}{g}} \equiv \sqrt{\eta z} \tag{88}$$

$$U(z) = y(\zeta) = y(\sqrt{\frac{4C}{g}z}) = y(\sqrt{\eta z}) \tag{89}$$

$$d\zeta = \sqrt{\frac{\eta}{4z}}dz \tag{90}$$

$$U'(z) = \frac{\partial}{\partial z}y\left(\sqrt{\frac{4Cz}{g}}\right) = \sqrt{\frac{C}{gz}}y'(\zeta) \tag{91}$$

$$zU''(z) = z\frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{\frac{C}{gz}}y'(\zeta)\right] = \frac{C}{g}y''(\zeta) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{gz}}y'(\zeta) \tag{92}$$

$$zU''(z) + U'(z) + \frac{C}{g}U(z) = \frac{C}{g}y''(\zeta) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{gz}}y'(\zeta) + \frac{C}{g}y(\zeta) \tag{93}$$

$$= \frac{1}{4z}\left[\zeta^2 y''(\zeta) + \zeta y'(\zeta) + \zeta^2 y(\zeta)\right] = 0 \tag{94}$$

$$\tag{95}$$

As soluções são as funções de Bessel de ordem zero que são regulares a $z = 0$, $J_0(\zeta)$.
A condição de contorno $u(L,t) = 0$ implica que $U(L) = y(\sqrt{\frac{4CL}{g}}) = 0$.
Seja $j_k$ a k-essimo zero da função de Bessel tal que

$$J_0(j_k) = 0 \tag{96}$$

Note-se que os zeros são reais.

Se

$$\sqrt{\frac{4CL}{g}} = j_k \tag{97}$$

$$C = \lambda_k^2 = \frac{j_k^2 g}{4L} \tag{98}$$

$$\implies J_0\left(\sqrt{\frac{4\lambda_k^2 L}{g}}\right) = J_0(j_k) = 0 \tag{99}$$

A solução geral, então, é

$$u(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sen}(\lambda_k t) + B_k \cos(\lambda_k t))\, J_0\left(\sqrt{\frac{4\lambda_k^2 z}{g}}\right) \tag{100}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sen}(\lambda_k t) + B_l \cos(\lambda_k t))\, J_0\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) \tag{101}$$

com

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{j_k^2 g}{4L}} \tag{102}$$

As outras condições de contorno determinam os coeficientes $A_k, B_k$:

$$u(z,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) = u_0(z) \tag{103}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(z,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) = v_0(z), \tag{104}$$

com

$$B_k = \frac{2}{L J_0'^2(j_k)} \int_0^{\sqrt{L}} x u_0(x^2) J_m(j_k \frac{x}{\sqrt{L}}) dx \tag{105}$$

$$= \frac{1}{L J_0'^2(j_k)} \int_0^{L} u_0(z) J_m(j_k \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{L}}) dz \tag{106}$$

$$= \frac{1}{L J_1^2(j_k)} \int_0^{L} u_0(z) J_m\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz \tag{107}$$

$$A_k = \frac{1}{\lambda_k L J_0'^2(j_k)} \int_0^{L} v_0(z) J_m\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz \tag{108}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{Lg}\, j_k J_1^2(j_k)} \int_0^{L} v_0(z) J_m\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz \tag{109}$$

---