Física Matemática I: Lista de Exercícios 6

Prazo: 28 novembro 2021

1. Seja $P_n(x)$ o n-ésimo polinômio de Legendre. Prove que $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$. Mostre então que $\int_x^1 P_n(x) = [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]/(2n+1)$.
2. Calcule o valor da integral $\int_{-1}^1 dx\, x^n\, P_n(x)$
3. Obtenha a expansão em série de Legendre da função $f(x) = |x|$ no intervalo $-1 < x < 1$.
4. [**Potencial de um anel uniformemente carregado**] Determine o potencial elétrico $\phi(r, \theta)$ produzido no vácuo por um anel unidimensional de raio R, uniformemente carregado com carga elétrica total Q e densidade linear de carga $\lambda = Q/(2\pi R)$, nas seguintes regiões:

   (a) $r > R$.

   (b) $r < R$.

   (c) $r = R$, mas $\theta \neq \pi/2$.

   As variáveis r e θ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do anel e cujo eixo z, a partir de onde o ângulo θ é medido, coincide com o eixo de simetria do anel.

   Sugestão 1. Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução da equação de Laplace:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \tag{1}$$

   Os coeficientes A_n e B_n são fixados pela solução ao longo do eixo de simetria (que correspondem a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$).

   Sugestão 2. Para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, vale a expansão binomial:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - k)_k}{k!} x^k, \tag{2}$$

onde, para $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(y)_n$ são os chamados símbolos de Pochhammer. Em particular, para $|t| < 1$, tem-se

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k, \tag{3}$$

com

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \tag{4}$$

5. [**Corda pendurada**] Determine a solução da equação da corda pendurada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial z}\left(z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \tag{5}$$

onde $g > 0$, que descreve o movimento de pequenas oscilações de uma corda de comprimento L localizada, quando em repouso, no intervalo $0 \leq z \leq L$ do eixo vertical, pendurada pelo seu extremo superior (o que corresponde à condição de contorno $u(L, t) = 0$ para todo t) e com condições iniciais

$$u(z, 0) = u_0(z) \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(z, 0) = v_0(z), \tag{7}$$

para certas funções u_0 e v_0 dadas.

Sugestão: A equação diferencial

$$zU''(z) + U'(z) + \lambda^2 U(z) = 0 \tag{8}$$

pode ser transformada na equação de Bessel de ordem zero

$$\zeta^2 y''(\zeta) + \zeta y'(\zeta) + \zeta^2 y(\zeta) = 0 \tag{9}$$

através das definições

$$\zeta = \sqrt{4\lambda^2 z} \tag{10}$$

$$U(z) = y(\zeta) = y(\sqrt{4\lambda^2 z}). \tag{11}$$