Soluções:
FisMat I Exercicios 5

Prazo: 10 novembro 2021

1. Obtenha a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz às condições de contorno $u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = 0$ para $0 < y < b$, $u(x, b) = 0$ e $u(x, 0) = h(x)$ para $0 \leq x \leq a$

A equação de Laplace em 2D é

$$\nabla^2 u(x, y) = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \tag{1}$$

Usando o método de separação de variáveis, vamos encontrar soluções da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{2}$$

$$\implies \frac{1}{X}\partial_x^2 X = -\frac{1}{Y}\partial_y^2 Y = -\alpha^2 \tag{3}$$

As equações para $X(x)$ e $Y(y)$ ficam

$$\partial_x^2 X(x) + \alpha^2 X(x) = 0 \tag{4}$$

$$\partial_y^2 Y(y) - \alpha^2 Y(y) = 0 \tag{5}$$

A solução geral para X é

$$X(x) = A\,\mathrm{sen}(\alpha x) + B\cos(\alpha x) \tag{6}$$

que satisfaz as condições de contorno

$$X(0) = X(a) = 0 \tag{7}$$

A solução é então da forma

$$X(x) = \text{sen}(\frac{n\pi x}{a}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

com autovalor

$$\alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \tag{9}$$

A equação para Y fica

$$\partial_y^2 Y - \alpha^2 Y = 0 \tag{10}$$

com $\alpha^2 > 0$.

A solução geral é então

$$Y(y) = Ae^{\alpha_n y} + Be^{-\alpha_n y} \tag{11}$$

$$Y(y) = A\,\text{senh}(\alpha_n y) + B\cosh(\alpha_n y) \tag{12}$$

As condições de contorno são

$$Y(b) = 0 \tag{13}$$

$$\implies Ae^{\alpha_n b} + Be^{-\alpha_n b} = 0 \tag{14}$$

$$\implies B = -Ae^{2\alpha_n b} \tag{15}$$

$$Y(b) = A\left[e^{\alpha_n y} - e^{2\alpha_n b}e^{-\alpha_n y}\right] \tag{16}$$

$$= A\left[e^{\alpha_n y} - e^{\alpha_n (2b-y)}\right] \tag{17}$$

$$= A\left[e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{n\pi}{a}(2b-y)}\right] \tag{18}$$

A solução geral até agora é

$$u(x,y) = \sum_n C_n X_n(x) Y_n(y) \tag{19}$$

$$= \sum_n C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{n\pi}{a}(2b-y)}\right] \tag{20}$$

$$= \sum_n C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\frac{n\pi b}{a}}\left[e^{\frac{n\pi(y-b)}{a}} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}\right] \tag{21}$$

$$= \sum_n C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\frac{n\pi b}{a}} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right) \tag{22}$$

A última condição de contorno é

$$u(x,0) = -\sum_n C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\frac{n\pi b}{a}} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \qquad = \tag{23}$$

$$= h(x) \tag{24}$$

As coeficientes da série de Fourier em seno da função $h(x)$ são $-C_n e^{\frac{n\pi b}{a}} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$. Então, os C_n são

$$C_n = -\frac{e^{-\frac{n\pi b}{a}}}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{2}{a} \int_0^a dx\, h(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{25}$$

A solução final é

$$u(x,y) = \sum_n \frac{2 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[\int_0^a dx'\, h(x') \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)\right] \tag{26}$$

---

2. Considere uma haste delgada e uniforme de comprimento L cuja distribuição de temperatura inicial é

$$u(0,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad 0 \le x \le L. \tag{27}$$

As duas extremidades da haste estão termicamente isoladas, isto é,

$$\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,L) = 0. \tag{28}$$

Calcule a temperatura $u(t,x)$ supondo que ela satisfaz a equação de difusão

$$\partial_t u(t,x) = \alpha^2 \partial_x^2 u(t,x), \tag{29}$$

onde $\alpha > 0$. Qual é a temperatura da haste no estado estacionário (quando $t \to \infty$)?

Usando o método de separação de variáveis,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= T(t)X(x) &(30)\\ \implies \frac{1}{T}\partial_t T &= \frac{\alpha^2}{X}\partial_x^2 X = -\beta^2 &(31)\\ \implies \partial_t T(t) + \beta^2 T(t) &= 0 &(32)\\ \partial_x^2 X(x) + \beta^2 X(x) &= 0 &(33) \end{aligned}$$

A solução geral é da forma

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-\beta^2 t} &(34)\\ X(x) &= A\cos(\beta x) + B\,\mathrm{sen}(\beta x) &(35) \end{aligned}$$

As condições de contorno são

$$\begin{aligned} \partial_x X(0) &= B = 0 &(36)\\ \implies X(x) &= \cos(\beta x) &(37)\\ \partial_x(L) &= \cos(\beta L) = 0 &(38)\\ \implies \beta &= \beta_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots &(39) \end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_n T_n(t) X_n(x) &(40)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &(41) \end{aligned}$$

A condição inicial é

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{42}$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L. \tag{43}$$

As coeficientes são os coeficientes da série de Fourier em cosseno da função seno:

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{44}$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L dx \left[\operatorname{sen}\left(\frac{(1+1)\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{(1-1)\pi x}{L}\right)\right] \tag{45}$$

$$= -\frac{1}{L}\left[\frac{L}{\pi(n+1)}\cos\left(\frac{(1+n)\pi x}{L}\right)\Big|_0^L + \frac{L}{\pi(n-1)}\cos\left(\frac{(1-n)\pi x}{L}\right)\Big|_0^L\right] \tag{46}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+n}\left\{\cos\left((1+n)\pi\right) - 1\right\} + \frac{1}{1-n}\left\{\cos\left((1-n)\pi\right) - 1\right\}\right] \tag{47}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\left\{(-1)^{1+n} - 1\right\} + \frac{1}{n-1}\left\{(-1)^{1-n} - 1\right\}\right] \tag{48}$$

$$= \left[1 - (-1)^{n+1}\right]\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right] \tag{49}$$

$$= \left[1 - (-1)^{n+1}\right]\frac{2}{1-n^2} \tag{50}$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ par} \end{cases} \tag{51}$$

exceto para C_0 que é

$$C_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{52}$$

$$= \frac{2}{\pi} \tag{53}$$

A solução final é

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{54}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{55}$$

No tempo grande,

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{2}{\pi} \tag{56}$$

---

3. Mostre que a solução formal da equação

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + F(x,t) \tag{57}$$

para $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, com a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, é dada por

$$u(x,t) = \int_{\infty}^{\infty} dy\, G[x-y,\alpha^2 t]f(y) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G[x-y,\alpha^2(t-\tau)]F(y,\tau) \tag{58}$$

onde

$$G[x,t] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{59}$$

4. Determine a solução da equação

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - a\,\mathrm{sen}(\pi x) \tag{60}$$

onde a é uma constante positiva, com as condições de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ e condições iniciais $u(x,0) = 0$ e $\partial u(x,t)/\partial t(x,0) = 0$.

Como $u(0,t) = u(1,t) = 0$, podemos expandir a função numa série de Fourier em senos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\mathrm{sen}(n\pi x) \tag{61}$$

com

$$u_n(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\,\mathrm{sen}(n\pi x) \tag{62}$$

Jogando na equação:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) n^2\pi^2 \operatorname{sen}(n\pi x) = \frac{1}{v^2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\operatorname{sen}(n\pi x) - a\operatorname{sen}(\pi x) \tag{63}$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\pi x)\left[\frac{1}{v^2}u_n''(t) + n^2\pi^2 u_n(t) - a\delta_{n,1}\right] \tag{64}$$

Então, temos as equações diferenciais ordinárias

$$u_1''(t) + v^2\pi^2 u_1(t) - v^2 a = 0 \tag{65}$$

$$u_n''(t) + v^2 n^2\pi^2 u_n(t) = 0, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{66}$$

Para $n \geq 2$ a solução geral é

$$u_n(t) = A_n \operatorname{sen}(vn\pi t) + B_m \cos(vn\pi t) \tag{67}$$

e para $n = 1$, podemos definir $U_1(t) = u_1(t) - \frac{a}{\pi^2}$. A equação fica

$$U_1''(t) + v^2\pi^2\left[U_n(t) + \frac{a}{\pi^2}\right] - v^2 a = U_1''(t) + v^2\pi^2 U_1(t) = 0 \tag{68}$$

com solução geral

$$U_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(v\pi t) + B_1 \cos(v\pi t) \tag{69}$$

$$\implies u_1(t) = U_n(t) + \frac{a}{\pi^2} = \frac{a}{\pi^2} + A_1 \operatorname{sen}(v\pi t) + B_1\cos(v\pi t) \tag{70}$$

A função inteira é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\operatorname{sen}(n\pi x) \tag{71}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\delta_{n,1}\frac{a}{\pi^2} + A_n\operatorname{sen}(vn\pi t) + B_m\cos(vn\pi t)\right]\operatorname{sen}(n\pi x) \tag{72}$$

As condições iniciais são:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\delta_{n,1}\frac{a}{\pi^2} + B_m\right] \operatorname{sen}(n\pi x) = 0 \tag{73}$$

$$\implies B_1 = -\frac{a}{\pi^2} \tag{74}$$

$$B_n = 0, \quad n \geq 2 \tag{75}$$

$$\implies u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen}(n\pi x) \tag{76}$$

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} vn\pi A_n \operatorname{sen}(n\pi x) = 0 \tag{77}$$

$$\implies A_n = 0 \tag{78}$$

A solução final é

$$u(x,t) = \frac{a}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x) - \frac{a}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)\cos(v\pi t) \tag{79}$$

$$= \frac{a}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)\left[1 - \cos(v\pi t)\right] \tag{80}$$

---

5. As oscilações livres de uma membrana uniforme retangular, de lados a e b, são descritas pela equação diferencial

$$\partial_x^2 u(x,y,t) + \partial_y^2 u(x,y,t) = \frac{1}{\gamma^2}\partial_t^2 u(x,y,t) \tag{81}$$

onde γ^2 é a razão entre a tensão τ da membrana e a sua densidade ρ. Considerando fixas as bordas da membrana, e as condições iniciais $u(x,y,0) = 0.1 \operatorname{sen}(\pi x/a)\operatorname{sen}(\pi y/b)$ e $\partial u/\partial t(x,y,0) = 0$, calcular

(a) a freqüência da oscilação;

(b) a velocidade máxima atingida pelo ponto central $(x,y) = (a/2, b/2)$ da membrana

---

Usando o ansatz:

$$u(x,y,t) = X(x)Y(t)T(t) \tag{82}$$

e jogando na equação, obtemos

$$\frac{1}{X(x)}\partial_x^2 X(x) + \frac{1}{Y(t)}\partial_y^2 Y(y) = \frac{1}{\gamma^2 T(t)}\partial_t^2 T(t) \tag{83}$$

$$= -\alpha^2 - \beta^2 \tag{84}$$

$$\implies X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0 \tag{85}$$

$$Y''(t) + \beta^2 Y(t) = 0 \tag{86}$$

$$T''(t) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)T(t) = 0 \tag{87}$$

Como as bordas são fixas:

$$X(0) = X(a) = 0 \tag{88}$$

$$\implies X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{89}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \tag{90}$$

$$Y(0) = Y(b) = 0 \tag{91}$$

$$\implies Y_m(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{92}$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b} \tag{93}$$

A equação para T é então

$$0 = T''(t) + \gamma^2\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)T(t) \tag{94}$$

$$T(t) = A_{nm}\operatorname{sen}\left(\gamma\pi t\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\right) + B_{nm}\cos\left(\gamma\pi t\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\right) \tag{95}$$

$$\equiv A_{nm}\operatorname{sen}(\ell\pi t) + B_{nm}\cos(\ell\pi t) \tag{96}$$

com

$$\ell = \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \tag{97}$$

A solução é

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\left[A_{nm}\operatorname{sen}(\gamma\ell\pi t) + B_{nm}\cos(\gamma\ell\pi t)\right] \tag{98}$$

As condições iniciais:

$$u(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{99}$$

$$= 0.1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{100}$$

Então, todos os coeficientes B_{nm} são 0 exceto

$$B_{1,1} = 0.1 \tag{101}$$

A outra condição inicial:

$$\partial_t u(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \gamma \ell \pi A_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) = 0 \tag{102}$$

$$\implies A_{nm} = 0 \tag{103}$$

A solução final é

$$u(x,y,t) = 0.1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\gamma \pi t \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\right) \tag{104}$$

A solução é oscilatória com frequência

$$\omega = \gamma \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}. \tag{105}$$

A velocidade pelo ponto central da membrana é

$$\partial_t u\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right) = -0.1\omega \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\gamma \pi t \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\right) \tag{106}$$

$$= -0.1\omega \operatorname{sen}\left(\gamma \pi t \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\right) \tag{107}$$

A máxima é

$$v_{\max} = 0.1\omega = \frac{\gamma\pi}{10}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}. \tag{108}$$

---

6. Usando transformadas de Fourier em seno, determine a solução formal da equação de condução de calor $\alpha^2\partial^2 u(x,t)/\partial x^2 = \partial u(x,t)/\partial t$, $(0 \leq x < \infty, 0 \leq t < \infty)$, sujeita às condições $u(x,0) = f(x)$ e $u(0,t) = 0$.

Como $u(0,t) = 0 \ \ \forall t$, podemos representar a função em transformada de Fourier em seno

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \ \mathrm{sen}(kx) u_k(t) \tag{109}$$

com

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \ \mathrm{sen}(kx) u(x,t) \tag{110}$$

A equação diferencial fica

$$0 = \alpha^2 \partial_x^2 u(x,t) - \partial_t u(x,t) \tag{111}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \ \mathrm{sen}(kx) \left[-\alpha^2 k^2 u_k(t) - \partial_t u_k(t)\right] \tag{112}$$

$$\implies \partial_t u_k(t) = -\alpha^2 k^2 u_k(t) \tag{113}$$

$$u_k(t) = u_k(0) e^{-\alpha^2 k^2 t} \tag{114}$$

A condição inicial $u_k(0)$ é

$$u_k(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \ \mathrm{sen}(kx) u(x,0) \tag{115}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \ \mathrm{sen}(kx) f(x) \tag{116}$$

A solução final é

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk \int_0^\infty dx' \,\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{sen}(kx')e^{-\alpha^2k^2t}f(x') && (117)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx'\, f(x')\int_0^\infty dk\, e^{-\alpha^2k^2t}\left(\cos\left[k(x+x')\right]+\cos\left[k(x-x')\right]\right) && (118)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx'\, f(x')\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^2t}}\left[e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha^2t}}+e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha^2t}}\right] && (119)\\
&= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty dx'\, f(x')\left[e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha^2t}}+e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha^2t}}\right] && (120)
\end{aligned}
$$

---

7. Determine a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0<x<a$, $0<y<b$, que satisfaz às condições de contorno $u(0,y)=0$ e $u(a,y)=f(y)$ para $0<y<b$, $u(x,b)=0$ e $u(x,0)=h(x)$ para $0\le x\le a$.

A equação é

$$\partial_x^2 u(x,y)+\partial_y^2 u(x,y)=0 \tag{121}$$

Mudando variáveis:

$$y'\equiv b-y \tag{122}$$

a equação não muda, mas as condições de contorno ficam

$$u(x,y'=0)=0 \tag{123}$$

$$u(x,y'=b)=h(x) \tag{124}$$

Usando o método de separação de variáveis, obtemos

$$u(x,y')=X(x)Y(y') \tag{125}$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \tag{126}$$

$$Y''(y')-\lambda^2Y(y')=0 \tag{127}$$

com solução geral

$$X(x) = A\,\mathrm{sen}(\lambda x) + B\cos(\lambda x) \tag{128}$$

$$Y(y') = D\,\mathrm{senh}(\lambda y') + D\cosh(\lambda y') \tag{129}$$

lembrando que λ pode ser um número complexo arbitrário.

As condições $u(0, y) = u(x, 0) = 0$ implicam que $B = D = 0$.

$$X(x) \propto \mathrm{sen}(\lambda x) \tag{130}$$

$$Y(y') \propto \mathrm{senh}(\lambda y') \tag{131}$$

Até agora, a solução é da forma

$$\int d\lambda C(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,\mathrm{senh}(\lambda(b-y)) \tag{132}$$

onde $\int d\lambda$ representa uma soma e/ou integral, incluindo todos os valores (complexos) possíveis do autovalor λ.

Um outra condição de contorno é

$$u(x, 0) = \int d\lambda C(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,\mathrm{senh}(\lambda b) \tag{133}$$

$$= h(x), \quad 0 < x < a \tag{134}$$

$$\tag{135}$$

Podemos representar $h(x)$ em série de Fourier

$$h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\frac{n\pi x}{a}) + b_n\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{a})\right] \tag{136}$$

Porém, como $u(0, y') = 0$, sabemos que $h(0) = 0$, e a série é

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{a}) \tag{137}$$

com coeficientes

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a dx\, h(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{138}$$

Então, temos

$$C(\lambda)\,\mathrm{senh}(\lambda b) = \begin{cases} \frac{2}{a}\int_0^a dx\, h(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & \lambda = \frac{n\pi}{a}, n = 1,2,3,\ldots \\ 0 & \lambda \neq \frac{n\pi}{a}, n = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{139}$$

No segundo caso ou $C(\lambda) = 0$ ou $\mathrm{senh}(\lambda b) = 0$.

O outro condição de contorno é

$$u(a,y') = \int d\lambda C(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda a)\,\mathrm{senh}(\lambda y') \tag{140}$$

$$= f(b-y'), \quad 0 < y < b \tag{141}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{142}$$

com

$$b'_n = \frac{2}{a}\int_0^a dy;\; f(b-y')\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{143}$$

A primeira equação pode ser escrito

$$u(a,y') = -\int d\lambda C(\lambda)\,\mathrm{senh}(i\lambda a)\,\mathrm{sen}(i\lambda y') \tag{144}$$

Então, temos

$$-C(\lambda)\,\mathrm{senh}(i\lambda a) = \begin{cases} \frac{2}{b}\int_0^b dy'\, f(b-y')\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{b}\right), & i\lambda = \frac{m\pi}{b}, m = 1,2,3,\ldots \\ 0 & i\lambda \neq \frac{n\pi}{b}, m = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{145}$$

ou

$$-C(\lambda)\,\mathrm{senh}(i\lambda a) = \begin{cases} \frac{2}{b}\int_0^b dy'\, f(b-y')\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{b}\right), & \lambda = -i\frac{m\pi}{b}, m = 1,2,3,\ldots \\ 0 & \lambda \neq -i\frac{n\pi}{b}, m = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{146}$$

Note que para $\lambda = -im\pi/b$, $C(\lambda) \neq 0$, mas

$$\operatorname{senh}(\lambda b) = i \operatorname{sen}(\frac{n\pi b}{b}) = 0 \tag{147}$$

e para $\lambda = n\pi/a$, $C(\lambda) \neq 0$, mas

$$\operatorname{senh}(i\lambda a) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi b}{b}) = 0. \tag{148}$$

Então, todos os condições são satisfeitas. Para todos outros valores de λ, $C(\lambda) = 0$.

A solução final é

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] + d_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \right\} \tag{149}$$

com

$$c_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a dx \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) h(x) \tag{150}$$

$$d_n = \frac{2}{b \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b dy \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) f(y) \tag{151}$$
