Física Matemática I: Lista de Exercícios 5

Prazo: 10 novembro 2021

1. Obtenha a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz às condições de contorno $u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = 0$ para $0 < y < b$, $u(x, b) = 0$ e $u(x, 0) = h(x)$ para $0 \leq x \leq a$

2. Considere uma haste delgada e uniforme de comprimento L cuja distribuição de temperatura inicial é

$$u(0, x) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L. \tag{1}$$

   As duas extremidades da haste estão termicamente isoladas, isto é,

$$\partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, L) = 0. \tag{2}$$

   Calcule a temperatura $u(t, x)$ supondo que ela satisfaz a equação de difusão

$$\partial_t u(t, x) = \alpha^2 \partial_x^2 u(t, x), \tag{3}$$

   onde $\alpha > 0$. Qual é a temperatura da haste no estado estacionário (quando $t \to \infty$)?

3. Mostre que a solução formal da equação

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + F(x, t) \tag{4}$$

   para $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, com a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, é dada por

$$u(x, t) = \int_{\infty}^{\infty} dy\, G[x - y, \alpha^2 t] f(y) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G[x - y, \alpha^2 (t - \tau)] F(y, \tau) \tag{5}$$

   onde

$$G[x, t] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{6}$$

4. Determine a solução da equação

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - a\,\mathrm{sen}(\pi x) \tag{7}$$

onde a é uma constante positiva, com as condições de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ e condições iniciais $u(x,0) = 0$ e $\partial u(x,t)/\partial t(x,0) = 0$.

5. As oscilações livres de uma membrana uniforme retangular, de lados a e b, são descritas pela equação diferencial

$$\partial_x^2 u(x,y,t) + \partial_y^2 u(x,y,t) = \frac{1}{\gamma^2}\partial_t^2 u(x,y,t) \tag{8}$$

onde γ^2 é a razão entre a tensão τ da membrana e a sua densidade ρ. Considerando fixas as bordas da membrana, e as condições iniciais $u(x,y,0) = 0.1\,\mathrm{sen}(\pi x/a)\,\mathrm{sen}(\pi y/b)$ e $\partial u/\partial t(x,y,0) = 0$, calcular

   (a) a freqüência da oscilação;

   (b) a velocidade máxima atingida pelo ponto central $(x,y) = (a/2, b/2)$ da membrana

6. Usando transformadas de Fourier em seno, determine a solução formal da equação de condução de calor $\alpha^2\partial^2 u(x,t)/\partial x^2 = \partial u(x,t)/\partial t$, $(0 \le x < \infty, 0 \le t < \infty)$, sujeita às condições $u(x,0) = f(x)$ e $u(0,t) = 0$.

7. Determine a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz às condições de contorno $u(0,y) = 0$ e $u(a,y) = f(y)$ para $0 < y < b$, $u(x,b) = 0$ e $u(x,0) = h(x)$ para $0 \le x \le a$.