Soluções:
FisMat I Exercicios 4

Prazo: 24 outubro 2021

1. Mostre que a transformação $(x, y) \to (\xi, \eta)$, com

$$\xi = x + y - \cos(x) \tag{1}$$

$$\eta = x - y + \cos(x) \tag{2}$$

reduz a equação

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\,\mathrm{sen}(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \cos^2(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \cos(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

à forma canônica

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u(\xi, \eta) = 0. \tag{4}$$

Invertendo as relações:

$$x = \frac{\xi + \eta}{2} \tag{5}$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\xi - \eta + 2\cos x\right] \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\xi - \eta + 2\cos\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)\right] \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Então, as derivadas parciais ficam:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial y} && (9)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y} && (10)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{sen} x\right]\frac{\partial}{\partial y} && (11)\\
\frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y} && (12)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y} && (13)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sen} x\right]\frac{\partial}{\partial y} && (14)\\
& && (15)
\end{aligned}
$$

A derivada mista é então

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} &= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{sen} x\right]\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sen} x\right]\frac{\partial}{\partial y}\right) && (16)\\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{4}(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4}(1-\operatorname{sen} x)\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\operatorname{sen} x)\frac{\partial}{\partial y}\right] && (17)\\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\cos^2 x\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4}(1-\operatorname{sen} x)\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4}\cos x\frac{\partial}{\partial y} && (18)\\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\cos^2 x\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4}\cos x\frac{\partial}{\partial y} && (19)\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \cos^2 x\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\operatorname{sen} x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \cos x\frac{\partial}{\partial y}\right] && (20)
\end{aligned}
$$

Então, as equações são equivalentes:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\operatorname{sen}(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \cos^2(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \cos(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} && (21)\\
&= 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 && (22)
\end{aligned}
$$

---

2. Mostrar que a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{23}$$

com as condições iniciais

$$u(x,0) = f(x) \tag{24}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{25}$$

é dada pela solução original de D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-vt) + f(x+vt)] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} dx'\, g(x') \tag{26}$$

---

3. Determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir cada uma das equações diferenciais parciais abaixo por pares de equações diferenciais ordinárias

(a) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$

$$u(t,y) = T(t)X(x) \tag{27}$$
$$\frac{x}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{28}$$
$$\implies \partial_t T(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{29}$$
$$x\partial_x^2 X(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{30}$$

A equação é separável.

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$

$$u(t,y) = T(t)X(x) \tag{31}$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{X}\partial_x^2 X + \frac{1}{X}(\partial_x X)\frac{1}{T}(\partial_t T) + \frac{1}{T}\partial_t T = 0 \tag{32}$$

$$= \frac{\partial_x^2}{X} + \frac{\partial_t T}{T}\left[1 + \frac{\partial_x X}{X}\right] \tag{33}$$

$$\implies \frac{\partial_t T}{T} = -\frac{\partial_x^2}{X}\left[1 + \frac{\partial_x X}{X}\right]^{-1} = \lambda \tag{34}$$

$$\partial_t T(t) - \lambda T(t) = 0 \tag{35}$$

$$\partial_x^2 X(x) + \lambda \partial_x X(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{36}$$

A equação é separável.

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x+y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{37}$$

$$0 = \frac{1}{X}\partial_x^2 X + \frac{x}{Y}\partial_y^2 Y + \frac{y}{Y}\partial_y^2 Y \tag{38}$$

Não é separável.

---

4. Ache a solução do seguinte problema de condução de calor:

- $100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < 1$, $t > 0$.
- $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, $t > 0$.
- $u(x,0) = sen(2\pi x) - 2sen(5\pi x)$, $0 \leq x \leq 1$.

A equação já está (quase) separada e, portanto, podemos usar o método de separação de variáveis.

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{39}$$
$$\frac{100}{X}\partial_x^2 X = \frac{1}{U}\partial_t T = -\lambda \tag{40}$$
$$X''(x) + \frac{\lambda}{100}X(x) = 0 \tag{41}$$
$$\dot{T}(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{42}$$

As soluções gerais são

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{100}}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{100}}x\right) \tag{43}$$
$$T(t) = Ce^{-\lambda t} \tag{44}$$

A condição $u(0,t) = 0$ implica que $A = 0$. A condição $u(1,t) = 0$ implica que $\lambda = 100(\pi m)^2$ com $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Então,

$$X_m(x) = B_m\,\mathrm{sen}(m\pi x) \tag{45}$$
$$T_m(t) = C_m e^{-100\pi^2 m^2 t} \tag{46}$$
$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m(x)T_m(t) \tag{47}$$
$$= \sum_m D_m\,\mathrm{sen}(m\pi x)e^{-100\pi^2 m^2 t} \tag{48}$$

A condição inicial é

$$u(x,0) = \mathrm{sen}(2\pi x) - 2\,\mathrm{sen}(5\pi x) \tag{49}$$
$$\Longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} D_m\,\mathrm{sen}(m\pi x) = \mathrm{sen}(2\pi x) - 2\,\mathrm{sen}(5\pi x) \tag{50}$$

Então, $D_2 = 1$ e $D_5 = -2$ e todos os outros são 0. A solução final é

$$u(x,t) = \mathrm{sen}(2\pi x)e^{-400\pi^2 t} - 2\,\mathrm{sen}(5\pi x)e^{-2500\pi^2 t} \tag{51}$$
$$= \mathrm{sen}(2\pi x)e^{-(20\pi)^2 t} - 2\,\mathrm{sen}(5\pi x)e^{-(50\pi)^2 t} \tag{52}$$

5. Determine o potencial eletrostático $V(x,y)$ na região $x \geq 0$ limitada por 3 planos $x = 0$, $y = 0$ e $y = b$, sabendo-se que o plano $x = 0$ é mantido a um potencial uniforme V_0 e os outros 2 planos são mantidos a um potencial nulo. Considere que não há cargas elétricas no interior da região.

No interior da região, a potencial eletrostático obedece a equação de Laplace

$$\nabla^2 V(x,y) = \partial_x^2 V(x,y) + \partial_y^2 V(x,y) = 0 \tag{53}$$

(Note que não tem dependência em z.)

Usando separação de variáveis:

$$V(x,y) = X(x)Y(y) \tag{54}$$
$$-\frac{1}{X}\partial_x^2 X = \frac{1}{Y}\partial_y Y = \lambda \tag{55}$$
$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{56}$$
$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \tag{57}$$

As condições $V(x,0) = V(x,b) = 0$ implica que

$$Y_m(y) = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{58}$$
$$\lambda = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{59}$$
$$X_m(x) = A_m e^{-\frac{m\pi x}{b}} + B_m e^{\frac{m\pi x}{b}} \tag{60}$$

A solução deve ficar finito em $x \to \infty$. Então, $B_m = 0$.

$$V(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \,\text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{-\frac{m\pi x}{b}} \tag{61}$$

A última condição é

$$V(0,y) = V_0, \quad 0 < y < b \tag{62}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \,\text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \tag{63}$$

Então, os coeficientes A_m são coeficientes da série de Fourier

$$
\begin{aligned}
A_m &= \frac{2}{b}\int_0^b dy V_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) && (64)\\
&= \frac{2V_0}{b}\left[-\frac{\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)}{\frac{m\pi}{b}}\right]_0^b && (65)\\
&= \frac{-2V_0}{m\pi}\left[(-1)^m - 1\right] && (66)\\
&= \begin{cases} 0, & m = 2p \\ \frac{4V_0}{m\pi}, & m = 2p+1 \end{cases} && (67)
\end{aligned}
$$

A solução final é

$$
\begin{aligned}
V(x,y) &= \frac{4V_0}{\pi}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{m}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-\frac{m\pi x}{b}} && (68)\\
&= \frac{4V_0}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\operatorname{sen}\left[\frac{(2p+1)\pi y}{b}\right]e^{-\frac{(2p+1)\pi x}{b}} && (69)
\end{aligned}
$$

---

6. Considere a solução da equação de onda

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (70)
$$

para $0 < x < L$ e $t > 0$, com as condições

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= 0 && (71)\\
u(L,t) + L\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0, \quad t \geq 0 && (72)\\
u(x,0) &= f(x) && (73)\\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L && (74)
\end{aligned}
$$

Usando o método de separação de variáveis $u(x,t) = X(x)T(t)$,

(a) Mostre que $X(x)$ deve satisfazer à equação $X'' + \lambda^2 X = 0$, onde λ^2 é uma constante positiva;

Usando o método de separação de variáveis,

$$
\begin{align}
u(x,t) &= X(x)T(t) \tag{75}\\
\frac{1}{u}\partial_x^2 u &= \frac{1}{v^2 u}\partial_t^2 u \tag{76}\\
= \frac{1}{X}\partial_x^2 X &= \frac{1}{v^2 T}\partial_t^2 T = -\gamma \tag{77}\\
\implies \partial_x^2 X(x) + \gamma X(x) = 0 \tag{78}\\
\partial_t^2 T(t) + v^2\gamma T(t) = 0 \tag{79}
\end{align}
$$

Devemos mostrar que $\gamma = \lambda^2 > 0$, devido as condições de contorno.

A solução geral da equação para X é

$$X(x) = A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\gamma}x) + B\cos(\sqrt{\gamma}x) \tag{80}$$

A condição $u(0,t) = 0$ exige que $B = 0$

$$X(x) = A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\gamma}x) \tag{81}$$

Até agora, γ pode ser qualquer número complexo.

A solução geral da função T é

$$T(t) = A\,\mathrm{sen}(v\sqrt{\gamma}t) + B\cos(v\sqrt{\gamma}t) \tag{82}$$

A condição inicial $\dot{u}(x,0) = 0$ implica que

$$
\begin{align}
\dot{T}(0) &= Av\sqrt{\gamma} = 0 \tag{83}\\
\implies A &= 0 \tag{84}\\
T(t) &= B\cos(v\sqrt{\gamma}t) \tag{85}\\
&= \frac{B}{2}\left[e^{iv\sqrt{\gamma}t} + e^{-iv\sqrt{\gamma}t}\right] \tag{86}
\end{align}
$$

Se o argumento $v\sqrt{\gamma}t$ não for real, a solução diverge para $t \to \infty$. Para ficar finito para todo $t > 0$, é necessário que

$$\sqrt{\gamma} \in \mathbb{R} \tag{87}$$
$$\implies \gamma \geq 0 \tag{88}$$

(b) Mostre que para se obter uma autofunção $X(x)$ não-trivial, o parâmetro λ deve satisfazer à relação $\tan(\lambda L) = -\lambda L$;

Vamos definir a notação para a raiz positivo do constante de separação $\gamma > 0$

$$\sqrt{\gamma} \equiv \lambda \tag{89}$$

A segunda condição de contorno é

$$u(L,t) + L\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \tag{90}$$
$$\implies X(L) + LX'(L) = 0 \tag{91}$$
$$= A\,\mathrm{sen}(\lambda L) + AL\lambda\cos(\lambda L) = 0 \tag{92}$$
$$\tan(\lambda L) = -L\lambda \tag{93}$$

Pode ver aqui que só tem soluções se $\lambda \in \mathbb{R}$ (i.e. $\lambda^2 > 0$), sem a exigência de que a solução permaneça finita para $t \to \infty$.

(c) Calcule os 3 valores mais baixos possíveis para λ

É necessário encontrar raízes da equação

$$\tan(a) + a = 0 \tag{94}$$

com $a \equiv \lambda L$.

As raízes positivas são

$$a_i = \{2.0288, 4.9132, 7, 9787, 11.0855, 14.2074, 17.3364, \ldots\} \tag{95}$$
$$\implies \lambda_i = 2.0288/L, 4.9132/L, 7, 9787/L, \ldots \tag{96}$$

As soluções negativos tem as mesmas magnitudes

$$\tan(-|a|) - |a| = -(\tan|a| + |a|) = 0 \tag{97}$$
$$\implies \lambda_i = -2.0288/L, -4.9132/L, -7,9787/L, \ldots \tag{98}$$

---

7. A equação de condução de calor em duas dimensões pode ser expressa em coordenadas polares planas como

$$\alpha^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{99}$$

Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)F(\theta)T(t)$, obtenha as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r)$, $F(\theta)$, e $T(t)$.

Colocando $u(r, \theta, t) = R(r)F(\theta)T(t)$ na equação:

$$\frac{\alpha^2}{u} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{100}$$
$$= \frac{\alpha^2}{R(r)}R''(r) + \frac{\alpha^2}{rR(r)}R'(r) + \frac{\alpha^2}{r^2 F(\theta)}F''(\theta) = \frac{1}{T(t)}T'(t) \tag{101}$$

O lado esquerda não depende de t, e o lado direita não depende de r e θ. Então, é igual a um constante

$$\frac{1}{T(t)}T'(t) = -\lambda \tag{102}$$
$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{103}$$

O lado esquerda fica

$$-\lambda = \frac{\alpha^2}{R(r)}R''(r) + \frac{\alpha^2}{rR(r)}R'(r) + \frac{\alpha^2}{r^2 F(\theta)}F''(\theta) \tag{104}$$
$$-\frac{1}{F(\theta)}F''(\theta) = r^2\frac{\lambda}{\alpha^2} + \frac{r^2}{R(r)}R''(r) + \frac{r}{R(r)}R'(r) = \mu^2 \tag{105}$$

com um outro constante de separação μ. Temos agora

$$F''(\theta) + \mu^2 F(\theta) = 0 \tag{106}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \left[\frac{\lambda}{\alpha^2} r^2 - \mu^2\right] R(r) = 0 \tag{107}$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{108}$$

Com μ, λ arbitrários.

---

8. Uma partícula atômica está confinada dentro de uma caixa retangular de lados a, b, e c. A partícula é descrita por uma função de onda ψ que satisfaz à equação de Schrödinger $(-\hbar^2/2m)\nabla^2\psi = E\psi$. Sabendo que a função de onda se anula em todos os pontos da superfície da caixa, calcule a energia E_0 do estado fundamental da partícula.

Em coordinadas euclidianas, o problema fica

$$\partial_x^2 \psi(x,y,z) + \partial_y^2 \psi(x,y,z) + \partial_z^2 \psi(x,y,z) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x,y,z) \tag{109}$$

com condições de contorno

$$\psi(0,y,z) = \psi(a,y,z) = \psi(x,0,z) = \psi(x,b,z) = \psi(x,y,0) = \psi(x,y,c) = 0 \tag{110}$$

para constantes a, b, c. Usando separação de variáveis:

$$\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{111}$$

$$\frac{1}{X}X'' + \frac{1}{Y}Y'' + \frac{1}{Z}Z'' + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \tag{112}$$

A problema é separável, e todo termo é constante. Toda função X, Y, Z tem a forma de senos e cossenos.

$$\frac{1}{X}X'' = -\lambda^2 \tag{113}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(s) = 0 \tag{114}$$

$$\implies X(x) = A\,\mathrm{sen}(\lambda x) + B\cos(\lambda x) \tag{115}$$

As condições de contorno exigem que

$$X(0) = X(a) = 0 \tag{116}$$

$$\implies X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{117}$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{118}$$

Semelhantemente,

$$Y_m(y) = \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{119}$$

$$Z_k(z) = \text{sen}\left(\frac{k\pi z}{b}\right) \tag{120}$$

Se um das constantes n, m, k é zero a solução é trivial $\psi = 0$. Uma solução não-trivial exige $n \geq 1, m \geq 1, k \geq 1$.

A equação fica

$$\frac{1}{X}X'' + \frac{1}{Y}Y'' + \frac{1}{Z}Z'' + \frac{2mE}{\hbar^2} = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2} - \frac{k^2\pi^2}{c^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \tag{121}$$

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}\right] \tag{122}$$

O estado fundamental é a solução com E mínima. Essa é o estado com $n = m = k = 1$, com energia

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right] \tag{123}$$
