Física Matemática I: Lista de Exercícios 4

Prazo: 24 outubro 2021

1. Mostre que a transformação $(x, y) \to (\xi, \eta)$, com

$$\xi = x + y - \cos(x) \tag{1}$$
$$\eta = x - y + \cos(x) \tag{2}$$

reduz a equação

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\,\mathrm{sen}(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \cos^2(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \cos(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

à forma canônica $\partial^2 u/\partial\xi\partial\eta = 0$.

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u(\xi,\eta) = 0. \tag{4}$$

2. Mostrar que a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

com as condições iniciais

$$u(x,0) = f(x) \tag{6}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{7}$$

é dada pela solução original de D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-vt) + f(x+vt)] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} dx'\, g(x') \tag{8}$$

3. Determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir cada uma das equações diferenciais parciais abaixo por pares de equações diferenciais ordinárias

(a) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.$

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x \partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.$

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x+y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

4. Ache a solução do seguinte problema de condução de calor:

   - $100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < 1$, $t > 0$.
   - $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, $t > 0$.
   - $u(x,0) = sen(2\pi x) - 2sen(5\pi x)$, $0 \leq x \leq 1$.

5. Determine o potencial eletrostático $V(x,y)$ na região $x \geq 0$ limitada por 3 planos $x = 0$, $y = 0$ e $y = b$, sabendo-se que o plano $x = 0$ é mantido a um potencial uniforme V_0 e os outros 2 planos são mantidos a um potencial nulo. Considere que não há cargas elétricas no interior da região.

6. Considere a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

para $0 < x < L$ e $t > 0$, com as condições

$$u(0,t) = 0 \tag{10}$$

$$u(L,t) + L\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{11}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \tag{13}$$

Usando o método de separação de variáveis $u(x,t) = X(x)T(t)$,

(a) Mostre que $X(x)$ deve satisfazer à equação $X'' + \lambda^2 X = 0$, onde λ^2 é uma constante positiva;

(b) Mostre que para se obter uma autofunção $X(x)$ não-trivial, o parâmetro λ deve satisfazer à relação $\tan(\lambda L) = -\lambda L$;

(c) Calcule os 3 valores mais baixos possíveis para λ

7. A equação de condução de calor em duas dimensões pode ser expressa em coordenadas polares planas como

$$\alpha^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{14}$$

Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)F(\theta)T(t)$, obtenha as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r)$, $F(\theta)$, e $T(t)$.

8. Uma partícula atômica está confinada dentro de uma caixa retangular de lados a, b, e c. A partícula é descrita por uma função de onda ψ que satisfaz à equação de Schrödinger $(-\hbar^2/2m)\nabla^2\psi = E\psi$. Sabendo que a função de onda se anula em todos os pontos da superfície da caixa, calcule a energia E_0 do estado fundamental da partícula.