Soluções:
FisMat I Exercicios 3

Prazo: 3 outubro 2019

1. Considere o operador diferencial linear

$$D_t = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \tag{1}$$

com $\omega > 0$ constante.

(a) Ache duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2 da equação homogênea

$$D_t[y(t)] = y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \tag{2}$$

e construa a solução geral.

Um exemplo de duas soluções linearmente independentes são

$$y_1(t) = \cos(\omega t) \tag{3}$$
$$y_2(t) = \operatorname{sen}(\omega t) \tag{4}$$

A solução geral é um combinação linear das duas soluções

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \tag{5}$$
$$= C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t) \tag{6}$$

(b) Ache a solução da equação homogênea (2) com condições de contorno

$$y(0) = 1 \tag{7}$$
$$y'(0) = 0 \tag{8}$$

Usando a forma geral:

$$y(0) = C_1 = 1 \tag{9}$$
$$y'(0) = \omega C_2 = 0 \tag{10}$$

a solução é

$$y(t) = \cos(\omega t) \tag{11}$$

(c) Usando as soluções da equação homogênea (2), y_1 e y_2, ache uma função de Green do operador D_t.

O Wronskano é

$$\begin{aligned} W[y_1(t), y_2(t)] &= y_1 y_2' - y_1' y_2 && (12)\\ &= \omega \cos^2(\omega t) + \omega \operatorname{sen}^2(\omega t) && (13)\\ &= \omega && (14) \end{aligned}$$

Podemos construir a função de Green assim

$$\begin{aligned} G(t,t') &= \frac{1}{W[y_1(t'), y_2(t')]} \left[y_2(t') y_1(t) \theta(t'-t) + y_1(t') y_2(t) \theta(t-t') \right] && (15)\\ &= \frac{1}{\omega} \left[\operatorname{sen}(\omega t') \cos(\omega t) \theta(t'-t) + \cos(\omega t') \operatorname{sen}(\omega t) \theta(t-t') \right] && (16)\\ &= \begin{cases} \operatorname{sen}(\omega t') \cos(\omega t), & t < t' \\ \cos(\omega t') \operatorname{sen}(\omega t), & t > t' \end{cases} && (17) \end{aligned}$$

---

2. Obtenha a transformada de Laplace de cada uma das funções abaixo

   (a) $f(t) = e^{-at} \operatorname{senh}(\omega t)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-at}\operatorname{senh}(\omega t)\} &= \int_0^\infty dt\, e^{-st} e^{-at} \operatorname{senh}(\omega t) && (18)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty dt \left[e^{-t(s+a-\omega)} - e^{-t(s+a+\omega)}\right] && (19)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s+a-\omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a+\omega} && (20)\\
&= \frac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2)} && (21)
\end{aligned}
$$

(b) $f(t) = \operatorname{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\operatorname{senh}(at)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\operatorname{senh}(at)\} && (22)\\
&= \frac{1}{2}\Big[\mathcal{L}\{e^{at}\operatorname{sen}(at)\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\operatorname{sen}(at)\} - \mathcal{L}\{e^{at}\cos(at)\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\cos(at)\}\Big] && (23)\\
&= \frac{1}{2}\frac{a}{(s-a)^2+a^2} + \frac{1}{2}\frac{a}{(s+a)^2+a^2} - \frac{1}{2}\frac{s-a}{(s-a)^2+a^2} + \frac{1}{2}\frac{s+a}{(s+a)^2+a^2} && (24)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2a-s}{(s-a)^2+a^2} + \frac{1}{2}\frac{2a+s}{(s+a)^2+a^2} && (25)\\
&= \frac{1}{2}\frac{(2a-s)(s+a)^2+(2a-s)a^2}{[(s-a)^2+a^2]\,[(s+a)^2+a^2]} + \frac{1}{2}\frac{(2a+s)(s-a)^2+(2a+s)a^2}{[(s-a)^2+a^2]\,[(s+a)^2+a^2]} && (26)\\
&= \frac{1}{2}\frac{4a^3+2a^2s-s^3}{4a^4+s^4} + \frac{1}{2}\frac{4a^3-2a^2s+s^3}{4a^4+s^4} && (27)\\
&= \frac{4a^3}{s^4+4a^4} && (28)
\end{aligned}
$$

(c) $f(t) = \begin{cases} \cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right) & t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{2\pi/3}^{\infty} dt\, e^{-st} \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{29}$$

$$= \int_{2\pi/3}^{\infty} \frac{1}{2}\left[e^{-t(s-i)}e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{-t(s+i)}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right] \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{s-i}e^{-\frac{2\pi}{3}(s-i)} + \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{s+i}e^{-\frac{2\pi}{3}(s+i)} \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-s\frac{2\pi}{3}}\left[\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right] \tag{32}$$

$$= \frac{s}{s^2+1}e^{-s\frac{2\pi}{3}} \tag{33}$$

---

3. A função de Bessel de ordem zero $J_0(t)$ é definida pela série

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots$$

Mostre que a transformada de Laplace de $J_0(t)$ é igual a $1/\sqrt{1+s^2}$.

A transformada é linear:

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m}}{2^{2m}(m^2)!}t^{2m}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m}}{2^{2m}(m^2)!}\mathcal{L}\left\{t^{2m}\right\} \tag{34}$$

Cada transformada é

$$\mathcal{L}\{t^{2m}\} = \int_0^{\infty} dt\, t^{2m}e^{-st} \tag{35}$$

$$= \frac{d^{2m}}{ds^{2m}}\int_0^{\infty} dt\, e^{-st} \tag{36}$$

$$= \frac{d^{2m}}{ds^{2m}}\frac{1}{s} \tag{37}$$

$$= \frac{(2m)!}{s^{2m+1}} \tag{38}$$

Então, temos

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m}(2m)!}{2^{2m}(m^2)!s^{2m+1}} \tag{39}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{2^2 s^3} + \frac{4!}{2^2 4^2 s^5} + \dots \tag{40}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^3} + \frac{3}{2 \times 4\, s^5} - \dots \tag{41}$$

Isso é a séries de Taylor do resultado para $s \to \infty$. Para ver isso, vamos calcular a série de Taylor de

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \tag{42}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{43}$$

para $x \to 0$.

$$g(x) \simeq g(0) + x\, g'(0) + \frac{x^2}{2} g''(0) + \dots \tag{44}$$

$$g(0) = 0 \tag{45}$$

$$g'(0) = \left.\frac{-x^2}{(x^2+1)^{3/2}}\right|_{x\to 0} + \left.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right|_{x\to 0} = 1 \tag{46}$$

$$g''(0) = 0 \tag{47}$$

$$g'''(0) = -3 \tag{48}$$

$$\vdots \tag{49}$$

$$g(x) \simeq x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} - \frac{5x^7}{16} + \dots \tag{50}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m^2)!} x^{2m+1} \tag{51}$$

A resultado é então

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = g\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m^2)! x^{2m+1}} \tag{52}$$

$$= \mathcal{L}\{J_0(t)\} \tag{53}$$

4. Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$. Prove que a transformada de Laplace de $f(at)$ é igual a $(1/a)F(s/a)$.

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st} f(at) \tag{54}$$

Com $u = at$, $du = adt$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \frac{1}{a}\int_0^\infty du\, e^{-\frac{s}{a}} f(u) &(55)\\ &= \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\Big|_{s\to s/a} &(56)\\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) &(57)\end{aligned}$$

5. Em cada um dos casos abaixo determine a transformada de Laplace inversa:

   (a) $F(s) = \dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{6s-4}{s^2-4s+20} &(58)\\ &= \frac{6s-4}{(s-2)^2+4^2} &(59)\\ &= 6\frac{(s-2)}{(s-2)^2+4^2} + 2\frac{4}{(s-2)^2+4^2} &(60)\\ &= 6\mathcal{L}\left\{e^{2t}\cos(4t)\right\} + 2\mathcal{L}\left\{e^{2t}\,\mathrm{sen}(4t)\right\} &(61)\\ \implies \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= e^{2t}\left[6\cos(4t) + 2\sin(4t)\right] &(62)\end{aligned}$$

   (b) $F(s) = \dfrac{5s+4}{s^3} - \dfrac{2s-18}{s^2+9} + \dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}$

A transformada (inversa) é linear. Podemos separar termos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}\right\} = 5t \tag{63}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^3}\right\} = 2t^2 \tag{64}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+9}\right\} = 2\cos(3t) \tag{65}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{18}{s^2+9}\right\} = 6\,\mathrm{sen}(3t) \tag{66}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{24}{s^4}\right\} = 4t^3 \tag{67}$$

O último é menos conhecido. Lembre-se a seguinte relação:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty du e^{-u}u^n \tag{68}$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \tag{69}$$

Para n inteiro, isso é $n!/s^{n+1}$, mais a expressão geral vale também para n não inteiro. Para $n = 1/2$, temos

$$\mathcal{L}\{t^{5/2}\} = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{s^{7/2}} = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\sqrt{s}}{s^4} \tag{70}$$

$$\implies \mathcal{L}^{-1}\left(30\frac{\sqrt{s}}{s^4}\right) = 30\frac{t^{5/2}}{\Gamma(\frac{7}{2})} \tag{71}$$

Finalmente, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 5t + 2t^2 - 2\cos(3t) + 6\,\mathrm{sen}(3t) + 4t^3 - 30\frac{t^{5/2}}{\Gamma(\frac{7}{2})} \tag{72}$$

Como a função gamma tem o valor

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \tag{73}$$

podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 5t + 2t^2 - 2\cos(3t) + 6\,\mathrm{sen}(3t) + 4t^3 - 16\frac{t^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \tag{74}$$

(c) $F(s) = \dfrac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$

Podemos expandir em frações parciais. $F(s)$ podem ser escrito na forma

$$\frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} \tag{75}$$

tal que

$$\begin{align} 2s^2 - 4 &= A(s-2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s-2) \tag{76}\\ &= s^2(A+B+C) - s(5A+2B+C) + 6A - 3B - 2C \tag{77}\\ \implies 2 &= A+B+C \tag{78}\\ 0 &= 5A+2B+C \tag{79}\\ -4 &= 6A-3B-2C \tag{80}\\ \implies A &= -\frac{1}{6} \tag{81}\\ B &= -\frac{4}{3} \tag{82}\\ C &= \frac{7}{2} \tag{83} \end{align}$$

Então, a transformada é

$$\begin{align} F(s) &= \frac{-1}{6(s+1)} - \frac{4}{3(s+2)} + \frac{7}{2(s+3)} \tag{84}\\ f(t) &= -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-3t} \tag{85} \end{align}$$

(d) $F(s) = \dfrac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3}$

Usando frações parciais:

$$F(s) = \frac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3} \tag{86}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} - \frac{7}{(s-2)^3} \tag{87}$$

$$\implies f(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{t} + 4t4^{2t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t} \tag{88}$$

(e) $F(s) = \dfrac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2+9)}$

$$F(s) = \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2+9)} \tag{89}$$

$$= \frac{40}{9s^2} + \frac{8}{9s} + \frac{10(s+5)}{9(s^2+3^2)} \tag{90}$$

$$\implies f(t) = \frac{40}{9}t + \frac{8}{9} + \frac{50}{27}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{10}{9}\cos(3t) \tag{91}$$

---

6. Determine as soluções das equações diferenciais abaixo utilizando transformadas de Laplace:

   (a) $\ddot{x}(t) + x(t) = t$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$.

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t) + x(t)\} = \mathcal{L}\{t\} \tag{92}$$

$$= s^2\tilde{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + \tilde{x}(s) = \frac{1}{s^2} \tag{93}$$

$$= s^2\tilde{x}(s) - s + 2 + \tilde{x}(s) \tag{94}$$

$$\tilde{x}(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s^2+1)} \tag{95}$$

$$= \frac{1}{s^3} + \frac{s-3}{s^2+2} \tag{96}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{x}(s)\} = t + \cos t - 3\,\mathrm{sen}\,t \tag{97}$$

(b) $\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) - x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

Com essas condições de contorno, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} &= s\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} - \dot{x}(0) && (98) \\ &= s\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} - 1 && (99) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t\dot{x}(t)) &= \int_0^\infty dt \dot{x}(t) t e^{-st} && (100) \\ &= -\int_0^\infty dt \dot{x}(t) \frac{d}{ds} e^{-st} && (101) \\ &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} && (102) \end{aligned}$$

Então, a transformada de Laplace da equação diferencial fica

$$0 = \mathcal{L}\left\{\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) - x(t)\right\} = s\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} - 1 - \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} - \mathcal{L}\{x(t)\} \tag{103}$$

A transformada de $\dot{x}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) && (104) \\ &= s\mathcal{L}\{x(t)\} && (105) \end{aligned}$$

Temos agora

$$\begin{aligned} 0 &= s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - 1 - \frac{d}{ds}\left[s\mathcal{L}\{x(t)\}\right] - \mathcal{L}\{x(t)\} && (106) \\ &= s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - 1 - \mathcal{L}\{x(t)\} - s\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} && (107) \\ &= s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - 1 - s\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x(t)\} && (108) \\ \implies \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x(t)\} &= s\mathcal{L}\{x(t)\} - 1 && (109) \end{aligned}$$

A solução geral dessa equação é

$$\tilde{x}(s) = \frac{1}{s^2} + C\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}. \tag{110}$$

Porém, com $C \neq 0$, não existe uma função com essa transformada de Laplace. Quando a transformada existe, sabemos que

$$\lim_{s\to\infty} \tilde{x}(s) = \lim_{s\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) = 0 \tag{111}$$

Então, a solução do problema é

$$\tilde{x} = \mathcal{L}^{-1}\{x(t)\} = \frac{1}{s^2} \tag{112}$$

$$x(t) = t \tag{113}$$

---

7. Pelo método das transformadas de Laplace ache a solução do seguinte sistema de equações diferenciais: $\dot{x}(t) + \dot{y}(t) = t$, $\ddot{x}(t) - y(t) = e^{-t}$ com as condições iniciais $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = -2$ e $y(0) = 0$

A transformada da primeira equação é

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} + \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = \mathcal{L}\{t\} \tag{114}$$

$$s\tilde{x}(s) - x(0) + s\tilde{y}(s) - y(0) = \frac{1}{s^2} \tag{115}$$

$$= s\tilde{x}(s) - 3 + s\tilde{y}(s) \tag{116}$$

E a segunda

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} \tag{117}$$

$$= s^2\tilde{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0) - \tilde{y}(s) = \frac{1}{s+1} \tag{118}$$

$$= s^2\tilde{x}(s) - 3s + 2 - \tilde{y}(s) \tag{119}$$

As duas equações são

$$\begin{pmatrix} s & s \\ s^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} + 3 \\ \frac{1}{s+1} - 2 + 3s \end{pmatrix} \tag{120}$$

$$\implies \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & s \\ s^2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} + 3 \\ \frac{1}{s+1} - 2 + 3s \end{pmatrix} \tag{121}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 1 \\ s & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} + 3 \\ \frac{1}{s+1} - 2 + 3s \end{pmatrix} \tag{122}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s^3} + \frac{3}{s} + \frac{1}{s+1} - 2 + 3s \\ \frac{1}{s} + 3s - \frac{1}{s+1} + 2 - 3s \end{pmatrix} \tag{123}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{s-3}{s^2+1} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s-3}{s^2+1} \end{pmatrix} \tag{124}$$

A solução é então

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} + 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-3}{s^2+1}\} \tag{125}$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 2 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{3}{2}\operatorname{sen} t \tag{126}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-3}{s^2+1}\} \tag{127}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t \tag{128}$$

---

8. O movimento de um oscilador harmônico unidimensional amortecido é descrito pela equação diferencial

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\,\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{129}$$

com α e ω constantes positivas. Considerando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, obtenha a solução $x(t)$ para cada um dos três casos:

A transformada de Laplace da equação é

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} + 2\alpha\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} + \omega^2\mathcal{L}\{x(t)\} && (130)\\
&= s^2\tilde{x}(s) - sx(0) - x'(0) + 2\alpha s\tilde{x}(s) - 2\alpha x(0) + \omega^2\tilde{x}(s) && (131)\\
&= (s^2 + 2\alpha s + \omega^2)\tilde{x}(s) - (s + 2\alpha)x_0 - v_0 && (132)\\
\tilde{x}(s) &= \frac{(s + 2\alpha)x_0 + v_0}{s^2 + 2\alpha s + \omega^2} && (133)\\
&= \frac{(s + 2\alpha)x_0 + v_0}{(s + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} && (134)
\end{aligned}
$$

onde $\Omega \equiv \omega^2 - \alpha^2$.

(a) $\omega^2 - \alpha^2 > 0$

Usando a notação $\Omega^2 = \omega^2 - \alpha^2 > 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{x(t)\} &= \frac{sx_0 + 2\alpha x_0 + v_0}{(s + \alpha)^2 + \Omega^2} && (135)\\
&= x_0\frac{s}{(s + \alpha)^2 + \Omega^2} + \frac{2\alpha x_0 + v_0}{\Omega}\frac{\Omega}{(s + \alpha)^2 + \Omega^2} && (136)\\
x(t) - x_0 e^{-\alpha t}\cos(\Omega t) &+ \frac{2\alpha x_0 + v_0}{\Omega}\ \operatorname{sen}(\Omega t) && (137)\\
&= x_0 e^{-\alpha t}\cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t) + \frac{2\alpha x_0 + v_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}\ \operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t) && (138)
\end{aligned}
$$

(b) $\omega^2 - \alpha^2 = 0$

Agora temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{x(t)\} &= \frac{sx_0 + 2\alpha x_0 + v_0}{(s + \alpha)^2} && (139)\\
&= \frac{x_0}{s + \alpha} + \frac{v_0 + x_0\alpha}{(s + \alpha)^2} && (140)\\
x(t) &= x_0 e^{-\alpha t} + (v_0 + x_0\alpha)te^{-\alpha t} && (141)
\end{aligned}
$$

(c) $\omega^2 - \alpha^2 < 0$

Define agora $\Omega = \alpha^2 - \omega^2 > 0$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(t)\} = \frac{sx_0 + 2\alpha x_0 + v_0}{(s+\alpha)^2 - \Omega^2} \tag{142}$$

$$= x_0 \frac{s}{(s+\alpha)^2 - \Omega^2} + \frac{2\alpha x_0 + v_0}{\Omega} \frac{\Omega}{(s+\alpha)^2 - \Omega^2} \tag{143}$$

$$x(t) - x_0 e^{-\alpha t} \cosh(\Omega t) + \frac{2\alpha x_0 + v_0}{\Omega} \ \operatorname{senh}(\Omega t) \tag{144}$$

$$= x_0 e^{-\alpha t} \cosh(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t) + \frac{2\alpha x_0 + v_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \ \operatorname{senh}(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t) \tag{145}$$
