Física Matemática I: Lista de Exercícios 3

Prazo: 3 outubro 2021

1. Considere o operador diferencial linear

$$D_t = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \tag{1}$$

com $\omega > 0$ constante.

(a) Ache duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2 da equação homogênea

$$D_t[y(t)] = y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \tag{2}$$

e construa a solução geral.

(b) Ache a solução da equação homogênea (2) com condições de contorno

$$y(0) = 1 \tag{3}$$

$$y'(0) = 0 \tag{4}$$

(c) Usando as soluções da equação homogênea (2), y_1 e y_2, ache uma função de Green do operador D_t.

2. Obtenha a transformada de Laplace de cada uma das funções abaixo

(a) $f(t) = e^{-at}\,\mathrm{senh}(\omega t)$

(b) $f(t) = \mathrm{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\,\mathrm{senh}(at)$

(c) $f(t) = \begin{cases} \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) & t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

3. A função de Bessel de ordem zero $J_0(t)$ é definida pela série

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \ldots$$

Mostre que a transformada de Laplace de $J_0(t)$ é igual a $1/\sqrt{1+s^2}$.

4. Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$. Prove que a transformada de Laplace de $f(at)$ é igual a $(1/a)F(s/a)$.

5. Em cada um dos casos abaixo determine a transformada de Laplace inversa:

   (a) $F(s) = \dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

   (b) $F(s) = \dfrac{5s+4}{s^3} - \dfrac{2s-18}{s^2+9} + \dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}$

   (c) $F(s) = \dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$

   (d) $F(s) = \dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$

   (e) $F(s) = \dfrac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$

6. Determine as soluções das equações diferenciais abaixo utilizando transformadas de Laplace:

   (a) $\ddot{x}(t) + x(t) = t$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$.

   (b) $\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) - x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

7. Pelo método das transformadas de Laplace ache a solução do seguinte sistema de equações diferenciais: $\dot{x}(t) + \dot{y}(t) = t$, $\ddot{x}(t) - y(t) = e^{-t}$ com as condições iniciais $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = -2$ e $y(0) = 0$

8. O movimento de um oscilador harmônico unidimensional amortecido é descrito pela equação diferencial

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\,\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{5}$$

   com α e ω constantes positivas. Considerando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, obtenha a solução $x(t)$ para cada um dos três casos:

   (a) $\omega^2 - \alpha^2 > 0$

   (b) $\omega^2 - \alpha^2 = 0$

   (c) $\omega^2 - \alpha^2 < 0$