Soluções:
FisMat I Exercicios 2

Prazo: 19 setembro 2021

1. Seja a função $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Calcule a transformada de Fourier $g(k)$ da função $f(x)$.

A transformada de Fourier é

$$\begin{aligned}
g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) && (2)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{1} dx\, x e^{-ikx} && (3)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{1} dx \left[\frac{1}{-i} \frac{d}{dk} e^{-ikx} \right] && (4)\\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dk} \int_{-t}^{1} dx\, e^{-ikx} && (5)\\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dk} \frac{1}{-ik} \left[e^{-ik} - e^{ik} \right] && (6)\\
&= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dk} \frac{\operatorname{sen} k}{k} && (7)\\
&= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\cos k}{k} - \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} \right] && (8)
\end{aligned}$$

---

2. Considere a transformada de Fourier $g(k)$ da função $f(x)$. Mostre que se

   (a) $g(-k) = g^*(k)$ então $f(x)$ é real

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \tag{9}$$

$$g^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f^*(x) \tag{10}$$

$$= g(-k) \tag{11}$$

$$\implies g(-k) - g^*(k) = 0 \tag{12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[f(x) - f^*(x)\right] \tag{13}$$

A transformada de Fourier é identicamente nula (para toda k) somente se a função é também nula. Então

$$f(x) - f^*(x) = 0 \tag{14}$$

(b) $g(-k) = -g^*(k)$ então $f(x)$ é puramente imaginária

Analogamente,

$$g(-k) + g^*(k) \tag{15}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[f(x) + f^*(x)\right] \tag{16}$$

$$= 0 \tag{17}$$

$$\implies f(x) + f^*(x) = 0 \tag{18}$$

3. Seja $\tilde{f}(k)$ a transformada de Fourier de $f(x)$ e $\tilde{f}_a(k)$ a transformada de Fourier de $f(x+a)$. Mostre que $\tilde{f}_a(k) = e^{ika}\tilde{f}(k)$.

$$\tilde{f}_a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x+a) \tag{19}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ik(x'-a)} f(x') \tag{20}$$

$$= e^{ika} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ik(x')} f(x') \tag{21}$$

$$= e^{ika} \tilde{f}(k) \tag{22}$$

com $x' = x + a$.

---

4. Mostre que as transformadas de Fourier em seno e co-seno de $f(x) = e^{-ax}$ são

$$g_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2 + a^2} \tag{23}$$

$$g_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2} \tag{24}$$

Sem utilizar integração de contorno (teorema dos resíduos), mostre então que

$$\int_0^{\infty} dk \, \frac{k}{k^2 + a^2} \, \mathrm{sen}(kx) = \frac{\pi}{2} e^{-ax} \tag{25}$$

Assumindo $a > 0$:

$$g_s(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \, \mathrm{sen}(kx) \tag{26}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-ax} \, \mathrm{sen}(kx) \tag{27}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx \, \frac{1}{2i} \left[e^{-x(a-ik)} - e^{-x(a+ik)} \right] \tag{28}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{a - ik} - \frac{1}{a + ik} \right] \tag{29}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2 + a^2} \tag{30}$$

$$
\begin{aligned}
g_c(k) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx f(x) \cos(kx) && (31) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx e^{-ax} \cos(kx) && (32) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \, \frac{1}{2} \left[e^{-x(a-ik)} + e^{-x(a+ik)} \right] && (33) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} \right] && (34) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2+a^2} && (35)
\end{aligned}
$$

A transformada inversa de seno é

$$
\begin{aligned}
f_{\text{impar}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk g_s(k) \operatorname{sen}(kx) && (36) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \, \frac{k}{k^2+a^2} \operatorname{sen}(kx) && (37) \\
&= \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ -e^{-ax} & x < 0 \end{cases} && (38)
\end{aligned}
$$

Então, para $x > 0$:

$$
\frac{\pi}{2} e^{-ax} = \int_0^\infty dk \, \frac{k}{k^2+a^2} \operatorname{sen}(kx) \tag{39}
$$

---

5. Determine a transformada de Fourier do pulso triangular

$$
f(x) = \begin{cases} c(1-a|x|) & |x| < \frac{1}{a} \\ 0 & |x| > \frac{1}{a} \end{cases} \tag{40}
$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} dx (1 - a|x|) e^{-ikx} \tag{41}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2c \int_{0}^{\frac{1}{a}} dx (1 - ax) \cos(kx) \tag{42}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ca}{k^2} \left[1 - \cos\left(\frac{k}{a}\right)\right] \tag{43}$$

---

6. Mostre que a transformada de Fourier de uma função esfericamente simétrica pode ser escrita na forma

$$g(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty dr [r f(r)] \operatorname{sen}(kr). \tag{44}$$

Em 3 dimensões, a transformada de Fourier é

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} f(x, y, z) \tag{45}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) \tag{46}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta e^{-ikr\cos(\theta_k)} f(r, \theta, \phi), \tag{47}$$

onde $k = |\vec{k}| = \sqrt{\vec{k}\cdot\vec{k}}$, e θ_k é o angulo entre $\vec{k}$ e $\vec{x}$. Se f é esferiamente simétrica, $f(r, \theta, \phi) = f(r)$. Na integral, pode girar as coordenadas $\vec{x}$ para que o eixo z (com $\theta = 0$) esteja na direção de $\vec{k}$. Nesta sistema de coordenadas $\theta_k = \theta$ e não tem uma dependência em ϕ

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta e^{-ikr\cos\theta} f(r) \tag{48}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int r^2 dr f(r) \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta e^{-ikr\cos\theta} \tag{49}$$

Define $\lambda = \cos\theta \implies d\lambda = -\operatorname{sen}\theta d\theta$

$$\int_0^\pi d\theta e^{-ikr\cos\theta} = -\int_1^{-1} d\lambda e^{-ikr\lambda} \tag{50}$$
$$= \int_{-1}^{1} d\lambda e^{-ikr\lambda} \tag{51}$$
$$= \frac{2\operatorname{sen}(kr)}{kr} \tag{52}$$

A transformada de Fourier é

$$g(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \int r^2 dr f(r) \frac{\operatorname{sen}(kr)}{kr} \tag{53}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int dr\, r\, f(r) \operatorname{sen}(kr) \tag{54}$$
$$\tag{55}$$

---

7. A transformada de Fourier da função $f(\vec{r})$ é dada por

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\vec{k}^2}. \tag{56}$$

Determine $f(\vec{r})$

---

g é uma função esferiamente simétrica. Então, seguindo a resultado do exercício anterior, a transformada inversa é

$$f(\vec{r}) = f(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \int dk\, k\, g(k) \operatorname{sen}(kr) \tag{57}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \int dk\, k\, \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}(kr) \tag{58}$$
$$= \frac{1}{2r\pi^2} \int_0^\infty dk\, \frac{1}{k} \operatorname{sen}(kr) \tag{59}$$
$$= \frac{1}{2r\pi^2} \frac{\pi}{2} \tag{60}$$
$$= \frac{1}{4\pi r} \tag{61}$$

---

8. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2} & |x| \le 2 \\ 0 & |x| > 2. \end{cases} \tag{62}$$

(a) Determine a transformada de Fourier de $f(x)$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) e^{-ikx} \tag{63}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cos(kx) \tag{64}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}^2 k}{k^2} \tag{65}$$

(b) Usando a relação de Parseval, calcule a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]^4 \tag{66}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left|\tilde{f}(k)\right|^2 \tag{67}$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{\operatorname{sen} k}{k}\right]^4 \tag{68}$$

Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]^4 = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2} dx \left(1-\frac{|x|}{2}\right)^2 \tag{69}$$

$$= \pi \int_0^2 dx \left(1-\frac{x}{2}\right)^2 \tag{70}$$

$$= \pi \int_0^2 dx \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) \tag{71}$$

$$= \pi \left(2 - 0 - \frac{4-0}{2} + \frac{8-0}{12}\right) \tag{72}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \tag{73}$$

---

9. Sejam $\tilde{f}(k)$ e $\tilde{g}(k)$ as transformadas de Fourier das funções $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x) - g(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, |\tilde{f}(k) - \tilde{g}(k)|^2 \tag{74}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)-g(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 - f(x)g^*(x) - f^*(x)g(x)\right) \tag{75}$$

$$= \int dxdkdk' e^{ikx}\tilde{f}(k)e^{-ik'x}\tilde{f}^*(k') + \int dxdkdk' e^{ikx}\tilde{g}(k)e^{-ik'x}\tilde{g}^*(k') \tag{76}$$

$$- \int dxdkdk' e^{ikx}\tilde{f}(k)e^{-ik'x}\tilde{g}^*(k') - \int dxdkdk' e^{ikx}\tilde{g}(k)e^{-ik'x}\tilde{g}^*(k') \tag{77}$$

$$= \int dkdk'\delta(k-k')\tilde{f}(k)\tilde{f}^*(k') + \int dkdk'\delta(k-k')\tilde{g}(k)\tilde{g}^*(k') \tag{78}$$

$$- \int dkdk'\delta(k-k')\tilde{f}(k)\tilde{g}^*(k') - \int dkdk'\delta(k-k')\tilde{g}(k)\tilde{f}^*(k') \tag{79}$$

$$= \int dk \left[|\tilde{f}(k)|^2 + |\tilde{g}(k)|^2 - \tilde{f}(k)\tilde{g}^*(k) - \tilde{g}(k)\tilde{f}^*(k)\right] \tag{80}$$

$$= \int dk |\tilde{f}(k) - \tilde{g}(k)|^2 \tag{81}$$

10. * A integral de Fourier

$$I = \frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega t}}{E_0 - i\Gamma/2 - \hbar\omega} \tag{82}$$

aparece em problemas de penetração de barreira, espalhamento, teoria de perturbação dependente do tempo e etc. Calcule o valor de I.

Não é necessário saber para este curso, mas pode fazer o integral usando o teorema dos resíduos.

$$I = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\frac{\Gamma t}{2\hbar}} e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} & t > 0 \end{cases} \tag{83}$$

---

11. * Um oscilador harmônico que se encontra no estado fundamental é descrito por uma função de onda $\psi_0(x) \sim e^{-x^2/2a^2}$. Determine a função de onda normalizada no espaço dos momentos $p = \hbar k$, e verifique explicitamente a validade da relação de Parseval neste caso.

A função de onda no espaço dos momentos é a transformada de Fourier da função de onda no espaço das posições. No caso da função gaussiana, a transformada de Fourier é também gaussiana.

$$\tilde{\psi}_0(p) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{-ikx} \tag{84}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \tag{85}$$

$$= e^{-\frac{p^2}{2\hbar^2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2a^2}\left(x+i\frac{p}{\hbar}a^2\right)^2} \tag{86}$$

$$\propto e^{-\frac{p^2}{2\hbar^2}a^2} \tag{87}$$

A normalização é

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, |\psi_0|^2 \tag{88}$$

$$= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\frac{p^2}{\hbar^2} a^2} \tag{89}$$

$$= N^2 \sqrt{\pi} \frac{\hbar}{\sigma} \tag{90}$$

$$\implies N = \pi^{1/4} \sqrt{\frac{a}{\hbar}} \tag{91}$$

$$\tilde{\psi}_0(p) = \pi^{-1/4} \sqrt{\frac{a}{\hbar}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar^2} a^2} \tag{92}$$

---

12. * O fator de forma nuclear $F(\vec{k})$ é a transformada de Fourier da distribuição de carga $\rho(\vec{r})$. Se ao medir o fator de forma encontra-se $F(k) = (2\pi)^{-3/2}(1 + k^2/a^2)^{-1}$, calcule a distribuição de carga correspondente

---

A transformada inversa é

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} F(\vec{k}) \tag{93}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}} \tag{94}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\lambda e^{ia\vec{\lambda}\cdot\vec{x}} \frac{1}{1 + \lambda^2} \tag{95}$$

$$= \frac{a^2}{2\pi^2 r} \int d\lambda\, \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \operatorname{sen}(a\lambda r) \tag{96}$$

(veja exercício 6.)

O mais fácil é usar o teorema dos resíduos (não é necessário saber neste curso):

$$\rho(\vec{r}) = \frac{a^2}{2\pi^2 r} \frac{\pi}{2} e^{-ar} \tag{97}$$

$$= \frac{a^2}{4\pi r} e^{-ar} \tag{98}$$

---

13. Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} \tag{99}$$

com $x > 0$ e $t > 0$, sujeita às condições $F(0,t) = 0$ e $F(x,0) = 1$ se $0 < x < 1$ e $F(x,0) = 0$ se $x \geq 1$. Utilizando transformadas de Fourier em seno, mostre que a solução da equação é

$$F(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\, e^{-u^2 t}\,\mathrm{sen}(ux)(1-\cos(u))/u \tag{100}$$

A condição $F(0,t) = 0$ é feito automaticamente pela extensão impar da função. Usando transformada de seno em x:

$$\tilde{F}(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dx\,\mathrm{sen}(kx)F(x,t) \tag{101}$$

com

$$F(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dk\,\mathrm{sen}(kx)\tilde{F}(k,t) \tag{102}$$

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dk\,\mathrm{sen}(kx)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(k,t) \tag{103}$$

$$= \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dk k^2\,\mathrm{sen}(kx)\tilde{F}(k,\omega) \tag{104}$$

Então, a transformada Fourier satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(k,t) = -k^2\tilde{F}(k,t), \tag{105}$$

com solução geral

$$\tilde{F}(k,t) = A(k)e^{k^2 t} + B(k) \tag{106}$$

$$F(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dk\,\mathrm{sen}(kx)\left[A(k)e^{-k^2 t} + B(k)\right] \tag{107}$$

A condição inicial é

$$F(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} \tag{108}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \,\mathrm{sen}(kx) \,[A(k) + B(k)] \tag{109}$$

Invertindo a expressão:

$$A(k) + B(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \,\mathrm{sen}(kx) F(x,0) \tag{110}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 dx \,\mathrm{sen}(kx) \tag{111}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos(k)}{k} \tag{112}$$

O problema não é completamente determinado, mas uma solução possível é com $B(k) = 0$:

$$F(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \,\mathrm{sen}(kx) A(k) e^{-k^2 t} \tag{113}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \,\mathrm{sen}(kx) \frac{1 - \cos(k)}{k} e^{-k^2 t} \tag{114}$$
