

# Física Matemática I: Lista de Exercícios 1

Prazo: 30 agosto 2021

1. Determine a série de Fourier da função periódica (descontínua)

$$f(x) = \cos(px) \quad (1)$$

com  $-\pi \leq x < \pi$  e com  $p \notin \mathbb{Z}$ . (I.e.,  $p \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

A partir do resultado mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 1} \quad (2)$$

2. A variação de pressão  $f(t) = \Delta P/P_0$  em torno da pressão atmosférica, que corresponde a uma onda sonora que se propaga no ar é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ -\frac{7}{8} & \text{para } \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{7}{8} & \text{para } \frac{T}{2} \leq t < \frac{3T}{4} \\ -1 & \text{para } \frac{3T}{4} \leq t < T \end{cases} \quad (3)$$

onde  $T$  é o período.

Considerando a decomposição dessa onda nos seus harmônicos, que harmônico pode ser detectado com mais clareza? Dê a intensidade relativa ( $\sim b_n^2/b_1^2$  onde  $b_n$  é o  $n$ -ésimo coeficiente da série de Fourier) de cada um dos 10 primeiros harmônicos.

3. Determine a série de Fourier que corresponde à função

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{para } -3 < x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

cujos período é igual a 6.

4. Obtenha a série de Fourier de senos que representa a função  $f(x) = e^x$  no intervalo  $(0, \pi)$ .
5. Obtenha a série de Fourier de co-senos que representa a função  $f(x) = e^x$  no intervalo  $(0, \pi)$ .
6. Ache a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{para } 0 < x < 5 \end{cases} \quad (5)$$

cujo período é igual a 10.

7. Uma corrente alternada  $i(t) = A \text{sen}(\omega t)$  passou por a) um retificador de meia onda que transmite a corrente somente quando ela passa no sentido positivo e b) um retificador de onda completa, que transmite o valor absoluto (instantâneo) da corrente. Mostre que no primeiro caso a saída é

$$\frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \text{sen}(\omega t) - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos[(n+1)\omega t]}{n(n+2)} \quad (6)$$

e no segundo caso é

$$\frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos(n\omega t)}{n^2 - 1} \quad (7)$$

8. Utilizando a equação de Parseval, e considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases} \quad (8)$$

mostre que  $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots = \pi^2/8$ .

9. Considere a função de período  $T = 2\pi$ ,  $f(x) = e^x$  para  $-\pi < x < \pi$ . Obtenha os coeficientes da série complexa de Fourier  $c_n$ .
10. Uma corda de comprimento  $L$  vibra presa nas suas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ . O movimento é descrito pela equação de onda  $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ . Supondo que a solução seja da forma  $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \text{sen}(n\pi x/L)$ , determine os coeficientes  $b_n(t)$  considerando as condições iniciais  $u(0,x) = f(x)$  e  $\partial u(0,x)/\partial t = g(x)$ .