Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

- Considere de novo a equação de Bessel de ordem m inteiro, na forma paramétrica

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \left(\ell^2\rho^2 - m^2\right) R(\rho) = 0$$

- As soluções gerais são combinações lineares das funções de Bessel e de Neumann

$$R(\rho) = \alpha_1 J_m(\ell\rho) + \alpha_2 N_m(\ell\rho)$$

- Um caso importante é quando R seja regular no origem

$$R(0) \neq \pm\infty,$$

- Neste caso, somente as funções de Bessel (de primeiro tipo) $J_m(\ell\rho)$ são soluções.

Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

- Uma outra condição comum é quando a equação é considerado num intervalo fechado $\rho \in [0, R_0]$, com condições de contorno

$$R(R_0) = 0,$$

- Então, soluções existem somente para valores particulares de ℓ:

$$J_m(\ell_k R_0) = 0$$
$$\implies \ell_k = \frac{j_{mk}}{R_0},$$

onde j_{mk} é a k-essimo zero da função de Bessel de ordem m

$$J_m(j_{mk}) = 0, \qquad k = (1, 2, 3, \ldots)$$

Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

- Isso é um problema de Sturm-Liouville:

$$(\rho R')' + \left(\ell^2 \rho - \frac{m^2}{\rho}\right) R = 0,$$

Com autovalores ℓ e autofunções $J_m(j_{mk}\rho/R_0)$.

- Na notação que usamos para problemas de Sturm-Liouville:

$$\left(p(x)u'\right)' + q(x)u + \lambda r(x)u = 0$$

$$\implies p(x) = x; \quad q(x) = -\frac{m^2}{x}; \quad r(x) = x$$

- Então, as autofunções com autovalores diferentes são ortogonais em relação do produto escalar com peso $r(x)$.

$$\ell_k \neq \ell_{k'} \implies 0 = \langle J_m(\ell_k \rho), J_m(\ell_{k'}\rho)\rangle_r = \int_0^{R_0} J_m(\ell_k \rho) J_m(\ell_{k'}\rho) r(\rho) d\rho$$

$$= \int_0^{R_0} J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0}) J_m(j_{mk'}\frac{\rho}{R_0}) \rho d\rho$$

Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

- Quando $k = k'$, a normalização padrão das funções de Bessel é

$$\int_0^{R_0} J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})J_m(j_{mk'}\frac{\rho}{R_0})\rho d\rho = \delta_{k,k'}\frac{R_0^2}{2}J_m'^2(j_{mk})$$

- Além disso, o conjunto das funções $J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})$ com $k = 1, 2, 3, \ldots$ é um base ortogonal completo no espaço de funções do problema.
- Qualquer solução do problema pode ser escrito

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0}),$$

Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

$$\int_0^{R_0} J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})J_m(j_{mk'}\frac{\rho}{R_0})\rho d\rho = \delta_{k,k'}\frac{R_0^2}{2}J_m'^2(j_{mk})$$

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})$$

- Podemos derivar a expressão para os coeficientes a_k. É exatamente como qualquer base ortogonal, exceto a normalização não-padrão:

$$\begin{aligned}\left\langle f(\rho), J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})\right\rangle_r &= \sum_{k'=1}^{\infty} a_{k'}\left\langle J_m(j_{mk'}\frac{\rho}{R_0}), J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})\right\rangle_r \\ &= \sum_{k'=1}^{\infty} a_{k'}\int_0^{R_0} \rho J_m(j_{mk'}\frac{\rho}{R_0})J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})d\rho \\ &= \sum_{k'=1}^{\infty} a_{k'}\delta_{k,k'}\frac{R_0^2}{2}J_m'^2(j_{mk}) = a_k\frac{R_0^2}{2}J_m'^2(j_{mk})\end{aligned}$$

$$\left\langle f(\rho), J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})\right\rangle_r = a_k \frac{R_0^2}{2} J_m'^2(j_{mk})$$

- As coeficientes são, então,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{R_0^2 J_m'^2(j_{mk})} \langle f, J_m \rangle_r \\ &= \frac{2}{R_0^2 J_m'^2(j_{mk})} \int_0^{R_0} \rho f(\rho) J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0}) d\rho \end{aligned}$$

- Essas relações podem ser generalizadas para condições de contorno mas geral. Veja seção 15.2.7.2 das notas de Prof. Barata http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap15.pdf

Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

$$\left\langle f(\rho), J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0})\right\rangle_r = a_k \frac{R_0^2}{2} J_m'^2(j_{mk})$$

- As coeficientes são, então,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{R_0^2 J_m'^2(j_{mk})} \langle f, J_m\rangle_r \\ &= \frac{2}{R_0^2 J_m'^2(j_{mk})} \int_0^{R_0} \rho f(\rho) J_m(j_{mk}\frac{\rho}{R_0}) d\rho \end{aligned}$$

- Essas relações podem ser generalizadas para condições de contorno mas geral. Veja seção 15.2.7.2 das notas de Prof. Barata `http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap15.pdf`

Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

- Por exemplo, podemos escrever a função $(1-x^2)$, definido no intervalo $[0,1]$, usando funções de Bessel de ordem 0:

$$1-x^2=\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(j_k x),$$

onde j_k são os zeros de J_0. As coeficientes são

$$a_k=\frac{2}{J_0'^2(j_k)}\langle(1-x^2,J_0)\rangle_r=\frac{2}{J_0'^2(j_k)}\int_0^1 x(1-x^2)J_0(j_k x)dx$$

- Usando a relação que derivamos na aula anterior:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m}J_m(x)\right]=-x^{-m}J_{m+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{0}J_0(x)\right]=J_0'(x)=-J_1(x)$$

$$a_k=\frac{2}{J_1^2(j_k)}\int_0^1 x(1-x^2)J_0(j_k x)dx$$

Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

$$1 - x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(j_k x)$$

$$a_k = \frac{2}{J_1^2(j_k)} \int_0^1 x(1 - x^2) J_0(j_k x) dx$$

- Com a outra relação de recorrencia,

$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m(x)\right] = x^m J_{m-1}(x) \implies \frac{d}{dx}\left[x J_1(x)\right] = x J_0(x)$$

então,

$$\int x J_0(j_k x) dx = \frac{1}{j_k^2} \int t J_0(t) dt = \frac{1}{j_k^2} t J_1(t) = \frac{1}{j_k} x J_1(j_k x)$$

- Então, a integral é

$$\int_0^1 \left[(1 - x^2)\right]\left[x J_0(j_k x)\right] dx = \frac{1}{j_k}(1 - x^2) x J_1(j_k x)\Big|_0^1 + \frac{2}{j_k} \int_0^1 x^2 J_1(j_k x) dx$$

$$= \frac{2}{j_k} \int_0^1 x^2 J_1(j_k x) dx$$

Ortogonalidade e completeza das funções de Bessel

$$1 - x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(j_k x)$$

$$a_k = \frac{2}{J_1^2(j_k)} \int_0^1 x(1 - x^2) J_0(j_k x) dx$$

$$\int_0^1 \Big[(1 - x^2)\Big] \Big[x J_0(j_k x)\Big] dx = \frac{2}{j_k} \int_0^1 x^2 J_1(j_k x) dx$$

- Então, a expressão final é

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(j_k x) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(j_k)}{j_k^2 J_1^2(j_k)} J_0(j_k x) \end{aligned}$$

onde j_k é o k-ésimo zero de J_0.