Equação de Bessel

- Vamos considerar de novo a equação de Laplace, esta vez em coordenadas cilíndricas.

$$\nabla^2 u(\rho,\phi,z) = 0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- Usando separação de variáveis:

$$u(\rho,\phi,z) \equiv R(\rho)P(\phi)Z(z)$$

$$0 = R''(\rho)P(\phi)Z(z) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)P(\phi)Z(z) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)P''(\phi)Z(z) + RPZ''$$

- Dividindo por $u(\rho,\phi,z)$,

$$-\frac{1}{Z(z)}Z''(z) = \frac{1}{R(\rho)}R''(\rho) + \frac{1}{\rho R(\rho)}R'(\rho) + \frac{1}{\rho^2 P}P''(\phi)$$

Equação de Bessel

- Vamos considerar de novo a equação de Laplace, esta vez em coordenadas cilíndricas.

$$\nabla^2 u(\rho,\phi,z) = 0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- Usando separação de variáveis:

$$u(\rho,\phi,z) \equiv R(\rho)P(\phi)Z(z)$$

$$0 = R''(\rho)P(\phi)Z(z) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)P(\phi)Z(z) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)P''(\phi)Z(z) + RPZ''$$

- Dividindo por $u(\rho,\phi,z)$,

$$-\frac{1}{Z(z)}Z''(z) = \frac{1}{R(\rho)}R''(\rho) + \frac{1}{\rho R(\rho)}R'(\rho) + \frac{1}{\rho^2 P}P''(\phi) = -\ell^2$$

Equação de Bessel

- $$-\frac{1}{Z(z)}Z''(z) = \frac{1}{R(\rho)}R''(\rho) + \frac{1}{\rho R(\rho)}R'(\rho) + \frac{1}{\rho^2 P}P''(\phi) = -\ell^2$$

- A equação para Z é

$$Z''(z) - \ell^2 Z(z) = 0$$

e tem soluções da forma

$$Z(z) = e^{\pm \ell z}$$

- Se o problema é independente de z, $\ell = 0$. Quando ℓ é imaginário, os soluções são oscilantes. Quando o parte real não é zero, as soluções diminuem (ou acrescem) exponencialmente.
- Os valores permitido depende das condições de contorno. Vamos supor na seguinte que $\ell^2 \in \mathbb{R}$.

- O outro equação é

$$\frac{1}{R(\rho)}R''(\rho) + \frac{1}{\rho R(\rho)}R'(\rho) + \frac{1}{\rho^2 P}P''(\phi) = -\ell^2.$$

Multiplicando por ρ^2,

$$-\frac{1}{P}P''(\phi) = \frac{\rho^2}{R(\rho)}R''(\rho) + \frac{\rho}{R(\rho)}R'(\rho) + \ell^2\rho^2 = \text{constante} \equiv m^2$$

- A equação para P é

$$P''(\phi) + m^2 P(\phi) = 0$$

- É a mesma eq., exceto esta vez, queremos q a função seja periódica

$$P(\phi + 2\pi) = P(\phi)$$

e então, as soluções são

$$P(\phi) = e^{\pm im\phi}$$

com $m \in (0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Equação de Bessel

- A equação radial é

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\ell^2\rho^2 - m^2)R(\rho) = 0.$$

- Podemos escrever a equação da forma padrão com uma mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x &\equiv \ell\rho \\ dx &= \ell d\rho \\ y(x) &= R(\ell\rho) \\ \implies 0 &= x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - m^2)y(x). \end{aligned}$$

- Então, as soluções para cada valor de ℓ tem uma relação muito simples $R(x) = y(x/\ell)$, e basta resolver esta equação geral, a equação de Bessel de ordem m.
- As soluções são as funções de Bessel $J_m(\ell\rho)$, $N_m(\ell\rho)$

- Para uma derivação das soluções, veja 7.8.2 das notas do Fismat II http://matt.luzum.org/Home/fm2019

- Uma das soluções é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem m:

$$J_m = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

- A segunda solução linearmente independente é a função de Bessel de segunda tipo (ou função de Neumann):

$$\begin{aligned} N_m(x) &= \frac{J_m(x)\cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\operatorname{sen}(m\pi)} \\ &= -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n + \frac{2}{\pi} J_m(x) \ln\frac{x}{2} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{\psi(n+1) + \psi(m+n+1)}{n!(m+n)!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n, \end{aligned}$$

onde ψ é a função digama $\quad \psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

$$J_m = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$N_m(x) = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n + \frac{2}{\pi} J_m(x) \ln \frac{x}{2}$$
$$- \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{\psi(n+1)+\psi(m+n+1)}{n!(m+n)!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n ,$$

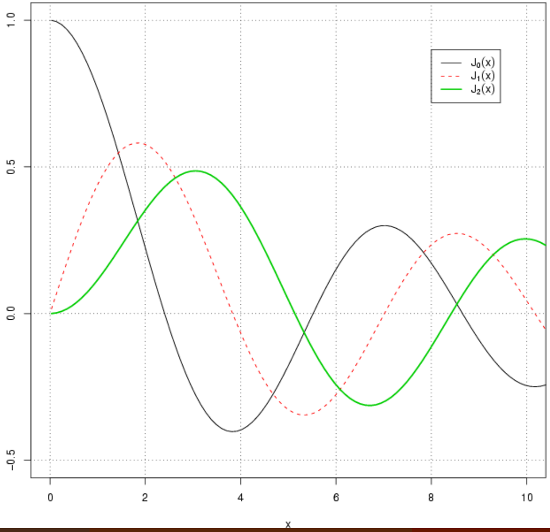
- A solução geral da equação pode ser escrito

$$y(x) = \beta_1 J_m(x) + \beta_2 N_m(x)$$

  com $m \geq 0$.
- Note-se que J_m é regular a $z = 0$, mas J_{-m} e N_m divergem por causa do fator x^{-m}. Fora deste ponto, as funções são analíticos para todo o intervalo $z \in (0, \infty)$.

Propriedades das funções de Bessel J_m

- Todos os J_m são oscilantes, e tem um número infinito de zeros. Segue um gráfico das primeiras:



Propriedades das funções de Bessel J_m

- Todos os J_m são oscilantes, e tem um número infinito de zeros.
- O amplitude de cada J_m decresce para x grande

$$\lim_{x\to+\infty} J_m(x) = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- Todos os J_m com $m > 0$ vai para zero para $x \to 0$

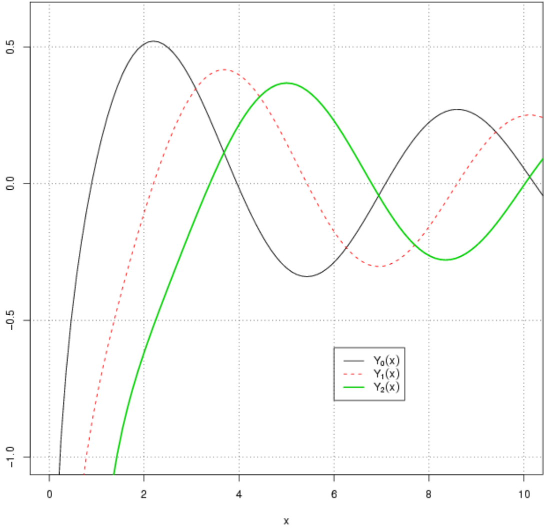
$$\lim_{x\to 0} J_m(x) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

- Somente J_0 vai para um valor diferente

$$\lim_{x\to 0} J_0(x) = 1.$$

Propriedades das funções de Bessel N_m

- As primeiras funções de Neumann parecem:



Propriedades das funções de Bessel N_m

- Também são oscilantes, com um número infinito de zeros.
- O amplitude de cada N_m decresce

$$\lim_{x \to +\infty} N_m(x) = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

- Quando $x \to 0$, os N_m vai para $-\infty$:

$$\lim_{x \to 0^+} N_m(x) \sim \begin{cases} \ln x, & m = 0 \\ \frac{1}{x^m}, & m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- Propriedades úteis:

Propriedades das funções de Bessel

- Considere a expressão

$$x^m J_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2m}}{2^{2n+m} n! \Gamma(m+n+1)}$$

- A derivada é

$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2m) x^{2n+2m-1}}{2^{2n+m} n! \Gamma(m+n+1)}$$

$$= x^m x^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2m) x^{2n}}{2^{2n+m} n! \Gamma(m+n+1)}$$

- Usando a propriedade da função gama:

$$\Gamma(m+n+1) = (n+m)\Gamma(n+m)$$

podemos escrever

$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m\right] = x^m x^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+m-1} n! \Gamma(m+n)} = x^m J_{m-1}(x)$$

- Semelhantemente, podemos mostrar que

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m}J_m\right] = -x^{-m}J_{m+1}(x)$$

- A partir da expressão de $x^{-m}J_m$:

$$x^{-m}J_m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+m}n!\Gamma(m+n+1)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m}J_m\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n+m}n!\Gamma(m+n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n+m-1}(n-1)!\Gamma(m+n+1)}$$

- Note-se que a derivada do primeiro termo com $n=0$ é zero. Podemos trocar $n \to n+1$ para obter:

Propriedades das funções de Bessel

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x^{-m}J_m\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n+m-1}(n-1)!\Gamma(m+n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)-1}}{2^{2(n+1)+m-1}((n+1)-1)!\Gamma(m+(n+1)+1)} \\
&= -x^{-m}x^{m+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+1+m}(n)!\Gamma(m+n+2)} \\
&= -x^{-m}J_{m+1}(x)
\end{aligned}$$

Propriedades das funções de Bessel

$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m\right] = x^m J_{m-1}(x)$$
$$= m x^{m-1} J_m + x^m J_m'$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m} J_m\right] = -x^{-m} J_{m+1}(x)$$
$$= -m x^{-m-1} J_m + x^{-m} J_m'$$
$$x^{2m}\frac{d}{dx}\left[x^{-m} J_m\right] = -x^m J_{m+1}(x) = -m x^{m-1} J_m + x^m J_m'$$

- subtraindo a primeira relação:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x)$$

- Ou, adicionando:

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J_m'(x)$$

- As mesmas relações também são válidos para as funções de Neumann.

Propriedades das funções de Bessel

$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m\right] = x^m J_{m-1}(x)$$
$$= m x^{m-1} J_m + x^m J_m'$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m} J_m\right] = -x^{-m} J_{m+1}(x)$$
$$= -m x^{-m-1} J_m + x^{-m} J_m'$$
$$x^{2m}\frac{d}{dx}\left[x^{-m} J_m\right] = -x^m J_{m+1}(x) = -m x^{m-1} J_m + x^m J_m'$$

- subtraindo a primeira relação:

$$N_{m-1}(x) + N_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} N_m(x)$$

- Ou, adicionando:

$$N_{m-1}(x) - N_{m+1}(x) = 2N_m'(x)$$

- As mesmas relações também são válidos para as funções de Neumann.