Equação de Legendre Associado

- Derivamos a Equação de Legendre Associado

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

$$u = R(r)P(\theta)F(\phi)$$

$$\implies 0 = (1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x)$$

com $x = \cos\theta$, $m \in \mathbb{Z}$, e $\ell \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

- Quando $m = 0$, as soluções são polinômios de Legendre $P_\ell(x)$
- Para $m \neq 0$, as soluções são os polinômios de Legendre associados

$$P_\ell^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$$

- Vamos mostrar:

Equação de Legendre Associado

- Seja $\quad u(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} v(x)$
- Nesse caso, obtemos a equação para $v(x)$

$$(1-x^2)u'(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} v'(x) - \frac{m}{2} 2x (1-x^2)^{\frac{m}{2}} v(x)$$

$$\left((1-x^2)u'\right)' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} v'' - \left(\frac{m}{2}+1\right) 2x(1-x^2)^{\frac{m}{2}} v'$$

$$- mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}} v' - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}} v + \frac{m^2}{2} 2x^2 (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} v$$

$$\frac{\left((1-x^2)u'\right)'}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}} = (1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' - mv + \frac{m^2}{1-x^2} x^2 v$$

$$0 = \left[\left((1-x^2)u'\right)' + \ell(\ell+1)u - \frac{m^2}{1-x^2} u\right] (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$= (1-x^2)v'' - 2(m+1)xv'$$

$$+ v \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} + \frac{m^2}{1-x^2} x^2 - mv\right)$$

Equação de Legendre Associado

$$
\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' \\
&\quad + v\left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} + \frac{m^2}{1-x^2}x^2 - mv\right) \\
&= (1-x^2)v''(x) - 2(m+1)xv'(x) + \Big(l(l+1) - m(m+1)\Big)v(x)
\end{aligned}
$$

- Podemos também derivar a equação de Legendre m vezes, e mostrar que a n-ésima derivada de P_ℓ satisfaz essa equação, e então $v(x) = P_\ell^{(n)}(x)$.

Equação de Legendre Associado

- Usando a regra de Leibniz: $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)u'' - 2xu' + \ell(\ell+1)u \\
0 &= \frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)u'' - 2xu' + \ell(\ell+1)u\right] \\
&= \sum_{k=0}^{2} \frac{m!}{k!(m-k)!}(u'')^{(m-k)}(1-x^2)^{(k)} \\
&\qquad - 2\sum_{k=0}^{1} \frac{m!}{k!(m-k)!} x^{(k)} (u')^{(m-k)} + \ell(\ell+1)u^{(m)} \\
&= (1-x^2)\left(u^{(m)}\right)'' - m2x\left(u^{(m-1)}\right)'' - \frac{m(m-1)}{2}2\left(u^{(m-2)}\right)'' \\
&\qquad - 2x\left(u^{(m)}\right)' - 2m\left(u^{(m-1)}\right)' + \ell(\ell+1)u^{(m)}
\end{aligned}$$

Equação de Legendre Associado

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)u'' - 2xu' + \ell(\ell+1)u\right] \\
&= (1-x^2)\left(u^{(m)}\right)'' - m2x\left(u^{(m-1)}\right)'' - \frac{m(m-1)}{2}2\left(u^{(m-2)}\right)'' \\
&\quad - 2x\left(u^{(m)}\right)' - 2m\left(u^{(m-1)}\right)' + \ell(\ell+1)u^{(m)} \\
&= (1-x^2)\left(u^{(m)}\right)'' - 2x(m+1)\left(u^{(m)}\right)' \\
&\quad + \left[-m(m-1) - 2m + \ell(\ell+1)\right]u^{(m)} \\
\implies 0 &= (1-x^2)\left(u^{(m)}\right)'' - 2(m+1)x\left(u^{(m)}\right)' \\
&\quad + \Big(\ell(\ell+1) - m(m+1)\Big)\left(u^{(m)}\right)
\end{aligned}
$$

Equação de Legendre Associado

- Então $v = P_\ell^{(m)}$
- Se os polinômios de Legendre P_ℓ são soluções da equação de Legendre, então, as funções

$$P_\ell^m(x) \equiv (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$$

  são soluções da equação de Legendre associada.
- Essas funções são denominadas polinômios de Legendre associados. Porem, somente são polinômios de verdade quando m é par, por causa da raiz.

Equação de Legendre Associado

$$P_\ell^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$$

- É claro que $P_\ell^m(x)$ é nulo se $m > \ell$, e essa fórmula é valido somente para $m \geq 0$.
- Podemos usar a fórmula de Rodrigues para escrever

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left((x^2-1)^\ell\right)$$

$$P_\ell^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}\left((x^2-1)^\ell\right)$$

- Essa fórmula também faz sentido quando $m < 0$, no caso $\ell + m \geq 0$.
- Podemos assim definir polinômios de Legendre associados para todo $-\ell \leq m \leq \ell$. (Porém, as funções com $m < 0$ não são independentes.)
- É possível demonstrar que

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x).$$

Equação de Legendre Associado

- Os primeiros polinômios de Legendre associados são

$$
\begin{aligned}
P_0^0 &= 1 \\
P_1^0 &= x \\
P_1^1 &= (1-x^2)^{1/2} \\
P_2^0 &= \frac{1}{2}(3x^2+1) \\
P_2^1 &= 3x(1-x^2)^{1/2} \\
P_2^2 &= 3(1-x^2) \\
P_3^0 &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\
P_3^1 &= -\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\
P_3^2 &= 15x(1-x^2) \\
P_3^3 &= -15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Equação de Legendre Associado

- A equação de Legendre associada

$$\left((1-x^2)u'\right)' + \ell(\ell+1)u - \frac{m^2}{1-x^2}u = 0.$$

é também um problema de Sturm-Liouville.

- Então, soluções com autovalores diferentes são ortogonais:

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = 0.$$

- Caso $\ell = \ell'$, temos a normalização:

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}$$

- Também existe uma condição de ortogonalidade para ℓ fixo

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_\ell^m P_\ell^n}{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!} & \text{se } m = n \neq 0 \\ \infty & \text{se } m = n = 0 \end{cases}$$

- As Funções Harmônicas Esféricas, ou simplesmente Harmônicos Esféricos são definidas por

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

- Existem vários convenções para a normalização. Por exemplo, é comum colocar o fator $(-1)^m$ dentro da definição do polinômio de Legendre associado. Essa fator é denominado fase de Condon-Shortley.
- Como $e^{-im\phi}$ é solução do parte azimutal da equação de Laplace, e $P_\ell^m(\cos\theta)$ é a solução da parte polar, os harmônicos esféricos são soluções da equação

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \ell(\ell+1)Y = 0$$

- Podemos verificar a identidade

$$
\begin{aligned}
Y_\ell^{-m}(\theta,\phi) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} P_\ell^{-m} e^{-im\phi} \\
&= (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m . e^{-im\phi} \\
&= (-1)^m (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m . e^{-im\phi} \\
&= (-1)^m Y_\ell^m(\theta,\phi)^*
\end{aligned}
$$

Funções Harmônicas Esféricas

- As primeiras harmônicos esféricos são

$$
\begin{aligned}
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\
Y_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{i\phi} \\
Y_2^0 &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \\
Y_2^1 &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta e^{i\phi} \\
Y_2^2 &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{2i\phi}
\end{aligned}
$$

- As relações de ortogonalidade são

$$\int_\Omega \overline{Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\phi)} Y_\ell^m(\theta,\phi) d\Omega \equiv \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \overline{Y_{\ell'}^{m'}} Y_\ell^m \,\text{sen}\,\theta d\theta d\phi = \delta_{m,m'}\delta_{\ell,\ell'}$$

- As harmônicos esféricos formam um base ortonormal completo das funções de quadrada integrável na esfera unitária:

$$f(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} f_\ell^m Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

com coeficientes

$$f_\ell^m = \int_\Omega f(\theta,\phi)\overline{Y_\ell^m(\theta,\phi)} d\Omega$$

Solução geral da equação de Laplace

- Com essas funções, podemos finalizar a solução da equação de Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$$

- Usando separação de variáveis,

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

obtemos

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)Y_\ell^m - \frac{1}{r^2}\ell(\ell+1)RY_\ell^m = 0$$

- Então, a função radial tem que satisfazer

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\ell(\ell+1)R$$

ou

$$(r^2R')' = r^2R'' + 2rR' = \ell(\ell+1)R$$

Solução geral da equação de Laplace

$$(r^2 R')' = r^2 R'' + 2rR' = \ell(\ell+1)R$$

- As soluções são na forma $R = r^n$:

$$r^2 n(n-1)r^{n-2} + 2rnr^{n-1} = [n(n-1)+2n]\, r^n = \ell(\ell+1)r^n$$

- Os valores possíveis de n são, então,

$$n^2 + n = \ell^2 + \ell \implies \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \implies n = \ell \text{ ou } -(\ell+1)$$

- A solução geral da função $R(r)$ é

$$R(r) = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}$$

e a solução geral da equação de Laplace é

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m} r^\ell + \frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}}\right) Y_\ell^m(\theta,\phi)$$