Polinômios de Legendre

- Derivamos a Equação de Legendre Associado

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$$

$$u = R(r)P(\theta)F(\phi)$$

$$\implies 0 = (1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x)$$

com $x = \cos\theta$, $m \in \mathbb{Z}$, e $\ell \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

- Quando $m = 0$, as soluções são polinômios de Legendre

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell}\sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}(-1)^a\binom{\ell}{a}\binom{2\ell-2a}{\ell}x^{\ell-2a}$$

$$= \sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}\frac{(-1)^a(2\ell-2a)!}{2^\ell(\ell-a)!(\ell-2a)!a!}x^{\ell-2a}, \qquad \ell \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} \frac{(-1)^a (2\ell - 2a)!}{2^\ell (\ell - a)!(\ell - 2a)!a!} x^{\ell - 2a}, \qquad \ell \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- É também possível escrever os polinômios com o fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left((x^2 - 1)^\ell \right)$$

- Note que

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} x^{2\ell - 2a} = \begin{cases} \frac{(2\ell - 2a)!}{(l - 2a)!} x^{\ell - 2a}, & \text{para } 0 \leq a \leq \lfloor \ell/2 \rfloor \\ 0, & \text{para } \lfloor \ell/2 \rfloor + 1 \leq a \leq \ell \end{cases}$$

Fórmula de Rodrigues

- Então, podemos usar o binômio de Newton para mostrar:

$$
\begin{aligned}
P_\ell(x) &= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left((x^2-1)^\ell\right) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(\sum_{a=0}^{\ell}\binom{\ell}{a}(-1)^a x^{2\ell-2a}\right) \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(\sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}\binom{\ell}{a}(-1)^a x^{2\ell-2a}\right) \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!}\sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}\binom{\ell}{a}(-1)^a \frac{(2\ell-2a)!}{(\ell-2a)!}x^{\ell-2a} \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!}\sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}\frac{\ell!}{a!(\ell-a)!}(-1)^a \frac{(2\ell-2a)!}{(\ell-2a)!}x^{\ell-2a} \\
&= \sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}\frac{(-1)^a(2\ell-2a)!}{2^\ell(\ell-a)!(\ell-2a)!a!}x^{\ell-2a}
\end{aligned}
$$

Relações úteis

- Existem várias relações úteis

$$P'_{\ell+1}(x) = (2\ell+1)P_\ell(x) + P'_{\ell-1}(x) \tag{1}$$

$$P'_{\ell+1}(x) = xP'_\ell(x) + (\ell+1)P_\ell(x) \tag{2}$$

$$\ell P_\ell(x) = xP'_\ell(x) - P'_{\ell-1}(x) \tag{3}$$

$$(\ell+1)P_{\ell+1} = (2\ell+1)xP_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x) \tag{4}$$

$$P_\ell(1) = 1 \tag{5}$$

$$P_\ell(-1) = (-1)^\ell \tag{6}$$

- Podemos provar com a fórmula de Rodrigues.

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left((x^2-1)^\ell\right)$$

Relações de recorrencia

$$
\begin{aligned}
P_{\ell+1} &= \frac{1}{2^{\ell+1}(\ell+1)!}\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left((x^2-1)^{\ell+1}\right) \\
P'_{\ell+1} &= \frac{1}{2^{\ell+1}(\ell+1)!}\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left[2(\ell+1)x(x^2-1)^{\ell}\right] \\
&= \frac{1}{2^{\ell}\ell!}\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\left[(x^2-1)^{\ell}+2\ell x^2(x^2-1)^{\ell-1}\right] \\
&= \frac{1}{2^{\ell}\ell!}\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\left[(x^2-1)^{\ell}+2\ell(x^2-1)(x^2-1)^{\ell-1}+2\ell(x^2-1)^{\ell-1}\right] \\
&= \frac{1}{2^{\ell}\ell!}\frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\left[(2\ell+1)(x^2-1)^{\ell}+2\ell(x^2-1)^{\ell-1}\right] \\
&= (2\ell+1)P_\ell+\frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d}{dx}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}(x^2-1)^{\ell-1} \\
&= (2\ell+1)P_\ell+P'_{\ell-1}(x),
\end{aligned}
$$

- Usando-se a regra de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)},$$

tem-se

$$\begin{aligned}
P'_{\ell+1} &= \frac{1}{2^{\ell+1}(\ell+1)!} \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}} \left[2(\ell+1)x(x^2-1)^\ell \right] \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}} \left[x(x^2-1)^\ell \right] \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!} \sum_{p=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{p} \left(\frac{d^p}{dx^p} x \right) \left(\frac{d^{\ell+1-p}}{dx^{\ell+1-p}} (x^2-1)^\ell \right) \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!} x \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}} (x^2-1)^\ell + \frac{(\ell+1)}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2-1)^\ell \\
&= x P'_\ell(x) + (\ell+1) P_\ell(x)
\end{aligned}$$

Relações de recorrencia

- Subtraindo as primeiras duas relações

$$P'_{\ell+1}(x) = (2\ell+1)P_\ell(x) + P'_{\ell-1}(x) \tag{1}$$
$$P'_{\ell+1}(x) = xP'_\ell(x) + (\ell+1)P_\ell(x) \tag{2}$$
$$\implies 0 = \ell P_\ell(x) + P'_{\ell-1}(x) - xP'_\ell(x)$$
$$\ell P_\ell(x) = xP'_\ell(x) - P'_{\ell-1}(x) \tag{3}$$

- Exercício: provar a quarta relação usando as primeiras tres

Função geratriz

- A função geratriz dos polinômios de Legendre é

$$L(x,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

- I.e., os polinômios de Legendre são os coeficientes da série de Taylor da função geratriz.
- Podemos mostrar usando a quarta relação de recorrencia:

$$\begin{aligned}
(\ell+1)P_{\ell+1} &= (2\ell+1)xP_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x) \\
\frac{\partial}{\partial t} L(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right] t^n
\end{aligned}$$

Função geratriz

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} L(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right] t^n \\
&= 2x \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + x \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n \\
&= 2x \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + x \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_n(x)t^{n+1} \\
&= 2xt \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n + (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - t^2 \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \\
&= \left(2xt - t^2\right) \frac{\partial}{\partial t} L(x,t) + (x-t)L(x,t)
\end{aligned}
$$

- Assim, $L(x,t)$ satisfaz a equação diferencial

$$
\frac{1}{L(x,t)} \frac{\partial}{\partial t} L(x,t) = \frac{(x-t)}{1-2xt+t^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \ln\left(1-2xt+t^2\right)
$$

Função geratriz

$$\frac{\partial}{\partial t}L(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right]t^n$$

$$= 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n$$

$$= 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)t^{n+1}$$

$$= 2xt\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n + (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - t^2\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

$$= \left(2xt - t^2\right)\frac{\partial}{\partial t}L(x,t) + (x-t)L(x,t)$$

- Assim, $L(x,t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{1}{L(x,t)}\frac{\partial}{\partial t}L(x,t) = \frac{(x-t)}{1-2xt+t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln\left(1-2xt+t^2\right)$$

Função geratriz

- Assim, $L(x,t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln L(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2}$$
$$\Longrightarrow \ln L(x,t) = \ln \left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2} + l(x) = \ln \left[\frac{\exp(l(x))}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}\right]$$

- Logo,

$$L(x,t) = \frac{\exp(l(x))}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}},$$

onde $l(x)$ é uma função arbitrária.

- Lembrando, porém, que $L(x,0) = P_0(x) = 1$ para todo x, obtem-se de imediato que $l(x) = 0$ para todo x. Isso estabelece a relação, como queríamos.

Ortogonalidade

- Vimos anteriormente que os polinômios de Legendre são soluções da equação diferencial de Legendre:

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \ell(\ell+1)y(x) = 0$$

que pode ser escrito na forma

$$\left((1-x^2)y'\right)' + l(l+1)y = 0.$$

- É um exemplo de um problema de Sturm-Liouville.

$$\begin{aligned}\left(p(x)y'\right)' + q(x)y &= -\lambda y \\ = Dy &= -\lambda y\end{aligned}$$

com $p(x) = (1-x^2)$, $q(x) = 0$ e autovalores $\lambda = l(l-1)$. Pode ser interpretado como equação de autovetor/autovalor do operador

$$D = \partial_x p(x) \partial_x + q(x)$$

.

Ortogonalidade

- Podem estudar o teoria de Sturm-Liouville em Fisica Matemática II, mas por enquanto, somente note os seguintes fatos:
- D é um operador Hermitiano. Então, os autovalores λ são reais, os autofunções são ortogonais e formam um base completo no espaço de funções de quadrado integrável no intervalo (aqui $[-1, 1]$).
- Neste contexto, ortogonalidade dos polinômios $P_n(x)$ significa que

$$\int_{-1}^{1} dx P_m(x) P_n(x) \propto \delta_{m,n}$$

- Vamos mostrar o ortogonalidade.

Ortogonalidade

- Considere um par de soluções P_m, P_n com $m \neq n$

$$0 = \partial_x \left[(1-x^2)\partial_x P_m(x)\right] + m(m+1)P_m(x)$$
$$0 = \partial_x \left[(1-x^2)\partial_x P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x)$$

- Multiplica para a outra solução

$$P_n\partial_x \left[(1-x^2)P'_m\right] + m(m+1)P_nP_m = 0$$
$$P_m\partial_x \left[(1-x^2)P'_n\right] + n(n+1)P_mP_n = 0$$

- Subtraindo as equações:

$$\left[n(n+1) - m(m+1)\right] P_mP_n = P_n\partial_x \left[(1-x^2)P'_m\right] - P_m\partial_x \left[(1-x^2)P'_n\right]$$

- Agora integramos cada lado em $\int_{-1}^{1}$:

$$\int_{-1}^{1} dx P_m(x)P_n(x) = \frac{1}{n(n+1)-m(m+1)}\int_{-1}^{1} dx \left\{P_n\partial_x \left[(1-x^2)P'_m\right] - P_m\partial_x \left[(1-x^2)P'_n\right]\right\}$$

Ortogonalidade

- Agora integramos cada lado em $\int_{-1}^{1}$:

$$\int_{-1}^{1} dx P_m(x) P_n(x) = \frac{1}{n(n+1) - m(m+1)} \int_{-1}^{1} dx \left\{ P_n \partial_x \left[(1-x^2)P'_m\right] - P_m \partial_x \left[(1-x^2)P'_n\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n(n+1) - m(m+1)} \left\{ P_n(1-x^2)P'_m \Big|_{-1}^{1} - P_m(1-x^2)P'_n \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} dx (1-x^2) \left[P'_n P'_m - P'_m P'_n\right] \right\}$$

$$= 0$$

- Assim, duas soluções P_m, P_n com $m \neq n$ são ortogonais.

Ortonormalidade

- Para $m = n$, pode mostrar que a normalização é
$$\int_{-1}^{1} dx P_m(x) P_n(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots$$
- O conjunto de polinômios de Legendre $\{P_\ell\}$ formam um base ortogonal completo.
- Isso significa que qualquer função "razoável" (contínua e de quadrado integrável no intervalo $[-1, 1]$) pode ser expandida numa série infinita envolvendo polinômios de Legendre:
$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell P_\ell(x)$$
- Os coeficientes podem ser pensados como as componentes de um vetor f num espaço de dimensão infinita com vetores de base dados por $P_\ell(x)$.
- Como encontramos os coeficientes c_ℓ? Usamos a ortogonalidade dos P_n's:

Polinômios como base completo

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell P_\ell(x)$$

- Como encontramos os coeficientes c_ℓ? Usamos a ortogonalidade dos P_n's:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} dx f(x) P_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int_{-1}^{1} dx P_n(x) P_m(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n} = \frac{2}{2n+1} c_n\end{aligned}$$

- Então,

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} dx f(x) P_n(x)$$