Funções especiais

- Vamos resolver a equação de Laplace usando o método de separação de variáveis.

$$\nabla^2 u(\vec{x}) = 0$$

- Encontraremos vários funções epeciais como soluções
- Como muitas leis de física envolvem o operador Laplaciano, essas funções são comumente encontradas e é útil conhecer algumas de suas propriedades

Oscilador harmônico simples

- Considere a equação de Laplace em coordenadas esféricas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

- Usando o método de separação de variáveis, podemos escrever

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)F(\phi)$$

$$0 =$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)PF + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)RF + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}PR$$

$$-\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{P}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)$$

- $\implies F''(\phi) + m^2 F(\phi) = 0$

Oscilador harmônico simples

- Considere a equação de Laplace em coordenadas esféricas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

- Usando o método de separação de variáveis, podemos escrever

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)F(\phi)$$

$$0 =$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) PF + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial P}{\partial \theta}\right) RF + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} PR$$

$$-\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{P}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial P}{\partial \theta}\right) = m^2$$

- $\implies F''(\phi) + m^2 F(\phi) = 0$

Oscilador harmônico simples

- $\implies F''(\phi) + m^2 F(\phi) = 0$
- Então, a função azimuthal $F(\phi)$ obedece a equação do oscilador harmônico simples
- Os autofunções são $e^{\pm im\phi}$, e os autovalores são m^2.
- No intervalo fechado $\phi \in [0, 2\pi]$, com $F(0) = F(2\pi)$, m é um numero inteiro.
- Equivalentemente pode usar combinações lineares com o mesmo autovalor m^2, como $\cos(m\phi)$ e $\mathrm{sen}(m\phi)$. As condições de contorno escolhem um combinação linear especifico.
- Já conhecemos bem essas funções. Vamos estudar as soluções $P(\theta)$ e $R(r)$.

Polinômios de Legendre

- Até agora temos $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial R}{\partial r}\right)+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{P}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial P}{\partial\theta}\right)=m^2$, com m inteiro. Então, podemos separar θ e r:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{P\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)+\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

- Por enquanto, a constante de separação é arbitrária, mas seria útil escolher a notação $\ell(\ell+1)$. A equação para θ é

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]P=0$$

- Podemos simplificar a equação com uma mudança de variáveis:

$$\mu\equiv\cos\theta\implies d\mu=-\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}=\operatorname{sen}^2\theta\frac{dP}{d\mu}=(1-\cos^2\theta)\frac{dP}{d\mu}=(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}$$

$$\implies 0=\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P$$

Polinômios de Legendre

- Até agora temos $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial R}{\partial r}\right) + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{P}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial P}{\partial\theta}\right) = m^2$, com m inteiro. Então, podemos separar θ e r:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -\frac{1}{P\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \ell(\ell+1)$$

- Por enquanto, a constante de separação é arbitrária, mas seria útil escolher a notação $\ell(\ell+1)$. A equação para θ é

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]P = 0$$

- Podemos simplificar a equação com uma mudança de variáveis:

$$\mu \equiv \cos\theta \implies d\mu = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta} = \operatorname{sen}^2\theta\frac{dP}{d\mu} = (1-\cos^2\theta)\frac{dP}{d\mu} = (1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}$$

$$\implies 0 = \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P$$

Polinômios de Legendre

- Até agora temos $\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{\operatorname{sen}\theta}{P}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)=m^2$, com m inteiro. Então, podemos separar θ e r:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{P\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)+\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}=\ell(\ell+1)$$

- Por enquanto, a constante de separação é arbitrária, mas seria útil escolher a notação $\ell(\ell+1)$. A equação para θ é

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]P=0$$

- Podemos simplificar a equação com uma mudança de variáveis:

$$\mu\equiv\cos\theta \implies d\mu=-\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}=\operatorname{sen}^2\theta\frac{dP}{d\mu}=(1-\cos^2\theta)\frac{dP}{d\mu}=(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}$$

$$\implies 0=\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P$$

- Até agora temos $\dfrac{\text{sen}^2\,\theta}{R}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial R}{\partial r}\right)+\dfrac{\text{sen}\,\theta}{P}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\dfrac{\partial P}{\partial\theta}\right)=m^2$, com m inteiro. Então, podemos separar θ e r:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{P\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)+\frac{m^2}{\text{sen}^2\,\theta}=\ell(\ell+1)$$

- Por enquanto, a constante de separação é arbitrária, mas seria útil escolher a notação $\ell(\ell+1)$. A equação para θ é

$$\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\text{sen}^2\,\theta}\right]P=0$$

- Podemos simplificar a equação com uma mudança de variáveis:

$$\mu\equiv\cos\theta\implies d\mu=-\,\text{sen}\,\theta d\theta$$

$$\text{sen}\,\theta\frac{dP}{d\theta}=\text{sen}^2\,\theta\frac{dP}{d\mu}=(1-\cos^2\theta)\frac{dP}{d\mu}=(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}$$

$$\implies 0=\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P$$

- $0 = \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right] P$
  onde $\mu = \cos\theta$ é definido no intervalo $[-1, 1]$, e a função P não deve ser periódica em μ.
- Essa equação se chama a equação de Legendre associada. Voltaremos para o caso geral.
- Consideramos primeiro o caso $m = 0$ (por exemplo, quando o problema tem uma simetria rotacional).
- Neste caso, a resultado é a equação de Legendre:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right) + \ell(\ell+1)P = 0$$

ou

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \ell(\ell+1)y(x) = 0 \tag{1}$$

Tipicamente a equação de Legendre é considerada no intervalo $[-1, 1]$ (como x é normalmente o cosseno de um ângulo).

- $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \ell(\ell+1)y(x) = 0$
- Vamos tentar achar a solução via série de potências.
- Ansatz: série de potências em torno de $x = 0$:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

- Jogamos agora isso nas equação diferencial

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m m x^{m-1}$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m m(m-1) x^{m-2}$$

- Assim, a equação diferencial fica

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left[m(m-1)x^{m-2} - m(m-1)x^m - 2mx^m + \ell(\ell+1)x^m \right] = 0$$

Polinômios de Legendre

- $$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left[m(m-1)x^{m-2} - m(m-1)x^m - 2mx^m + \ell(\ell+1)x^m\right] = 0$$
- Note que
$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m m(m-1)x^{m-2} = \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^{m-2}$$
$$= \sum_{m'=0}^{\infty} c_{m'+2}(m'+2)(m'+1)x^{m'}$$
- Assim, vemos que
$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[c_{m+2}(m+2)(m+1) - c_m m(m-1) - 2c_m m + c_m \ell(\ell+1)\right] x^m = 0$$
- A série de Taylor é única e assim, necessariamente
$$0 = c_{m+2}(m+2)(m+1) - c_m \left[m(m-1) + 2m - \ell(\ell+1)\right]$$

Polinômios de Legendre

$$
\begin{aligned}
0 &= c_{m+2}(m+2)(m+1) - c_m\left[m(m-1) + 2m - \ell(\ell+1)\right] \\
c_{m+2} &= \frac{c_m}{(m+1)(m+2)}\left[m(m-1) + 2m - \ell(\ell+1)\right] \\
&= c_m \frac{m(m+1) - \ell(\ell+1)}{(m+1)(m+2)}
\end{aligned}
$$

- Note que c_2 depende de c_0, c_4 depende de c_2, c_6 depende de c_4, etc. Semelhantemente com c_1, c_3, c_5, etc.
- Dessa forma, fica claro que a solução geral da equação de Legendre fica apenas em termos de duas constantes arbitrários c_0 e c_1. Todos os outros pode ser escritos em termos destas duas constantes.

Polinômios de Legendre

- $c_{m+2} = c_m \dfrac{m(m+1) - \ell(\ell+1)}{(m+1)(m+2)}$
- Explicitamente:

$$c_{2k} = c_0 \prod_{n=0}^{k-1} \left[\frac{2n(2n+1) - \ell(\ell+1)}{(2n+1)(2n+2)} \right]$$
$$= \frac{c_0}{(2k)!} \prod_{n=0}^{k-1} \Big[2n(2n+1) - \ell(\ell+1) \Big]$$

- e semelhantemente

$$c_{2k+1} = c_1 \frac{1}{(2k+1)!} \prod_{n=0}^{k-1} \Big[(2n+1)(2n+2) - \ell(\ell+1) \Big]$$

- A solução geral é então da forma

$$y(x) = c_0 y_\ell^{(0)}(x) + c_1 y_\ell^{(1)}(x)$$

onde

$$
\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{c_0}{(2k)!}\prod_{n=0}^{k-1}\Big[2n(2n+1)-\ell(\ell+1)\Big]c_{2k+1} \\
&= c_1\frac{1}{(2k+1)!}\prod_{n=0}^{k-1}\Big[(2n+1)(2n+2)-\ell(\ell+1)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 y_\ell^{(0)}(x) + c_1 y_\ell^{(1)}(x)
$$

onde

$$
y_\ell^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\prod_{n=0}^{k-1}\Big[2n(2n+1)-\ell(\ell+1)\Big]
$$

$$
y_\ell^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{n=0}^{k-1}\Big[(2n+1)(2n+2)-\ell(\ell+1)\Big]
$$

$$y_\ell^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \prod_{n=0}^{k-1} \Big[2n(2n+1) - \ell(\ell+1) \Big]$$

$$y_\ell^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \prod_{n=0}^{k-1} \Big[(2n+1)(2n+2) - \ell(\ell+1) \Big]$$

- No ponto $x = \pm 1$, para $\ell \in \mathbb{R}$, a soma na $y_\ell^{(0)}(\pm 1)$ converge apenas para ℓ um número inteiro não negativo par. A soma na $y_\ell^{(1)}(\pm 1)$ converge apenas para ℓ um número inteiro positivo impar.
- Então, a solução finita existe no intervalo inteiro$[-1, 1]$ somente para ℓ inteiro não negativo. A solução é

$$P_\ell = \begin{cases} c_0 y_\ell^{(0)}(x), & \ell \text{ par} \\ c_1 y_\ell^{(1)}(x), & \ell \text{ impar} \end{cases}$$

- Com ℓ inteiro, cada soma é troncada. Quando $\ell = 2n$ ou $\ell = 2n+1$, a coeficiente é zero, e então o termo é zero para toda $k > \ell/2$.

$$y_\ell^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \prod_{n=0}^{k-1} \Big[2n(2n+1) - \ell(\ell+1)\Big]$$

$$y_\ell^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \prod_{n=0}^{k-1} \Big[(2n+1)(2n+2) - \ell(\ell+1)\Big]$$

- No ponto $x = \pm 1$, para $\ell \in \mathbb{R}$, a soma na $y_\ell^{(0)}(\pm 1)$ converge apenas para ℓ um número inteiro não negativo par. A soma na $y_\ell^{(1)}(\pm 1)$ converge apenas para ℓ um número inteiro positivo impar.
- Então, a solução finita existe no intervalo inteiro$[-1, 1]$ somente para ℓ inteiro não negativo. A solução é

$$P_\ell = \begin{cases} c_0 y_\ell^{(0)}(x), & \ell \text{ par} \\ c_1 y_\ell^{(1)}(x), & \ell \text{ impar} \end{cases}$$

- Com ℓ inteiro, cada soma é troncada. Quando $\ell = 2n$ ou $\ell = 2n+1$, a coeficiente é zero, e então o termo é zero para toda $k > \ell/2$.

$$P_\ell = \begin{cases} c_0 y_\ell^{(0)}(x), & \ell \text{ par} \\ c_1 y_\ell^{(1)}(x), & \ell \text{ impar} \end{cases}$$

$$y_\ell^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \prod_{n=0}^{k-1} \Big[2n(2n+1) - \ell(\ell+1) \Big]$$

$$y_\ell^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \prod_{n=0}^{k-1} \Big[(2n+1)(2n+2) - \ell(\ell+1) \Big]$$

- P_ℓ é então um polinômio de grau ℓ.
- c_0 e c_1 são normalmente escolhidos tal que P_ℓ podem ser escritos

$$\begin{aligned} P_\ell(x) &= \frac{1}{2^\ell} \sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} (-1)^a \binom{\ell}{a} \binom{2\ell - 2a}{\ell} x^{\ell - 2a} \\ &= \sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} \frac{(-1)^a (2\ell - 2a)!}{2^\ell (\ell - a)! (\ell - 2a)! a!} x^{\ell - 2a}, \qquad \ell \in \{0, 1, 2, \ldots\} \end{aligned}$$

- c_0 e c_1 são normalmente escolhidos tal que P_ℓ podem ser escritos

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell}\sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}(-1)^a \binom{\ell}{a}\binom{2\ell-2a}{\ell}x^{\ell-2a}$$
$$= \sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}\frac{(-1)^a(2\ell-2a)!}{2^\ell(\ell-a)!(\ell-2a)!a!}x^{\ell-2a}, \qquad \ell \in \{0,1,2,\ldots\}$$

onde o piso

$$\lfloor \ell/2 \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq \ell/2\} = \begin{cases} \frac{\ell}{2}, & \ell \text{ par} \\ \frac{\ell-1}{2}, & \ell \text{ impar} \end{cases}$$

é o maior inteiro menor ou igual a $\ell/2$.

- Esses são os polinômios de Legendre

Polinômios de Legendre

- $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell} \sum_{a=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} (-1)^a \binom{\ell}{a} \binom{2\ell - 2a}{\ell} x^{\ell-2a}$
- As primeiras polinômios de Legendre são então

ℓ	$P_\ell(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}\left(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5\right)$