Violação de causalidade na equação de difusão

Resumo

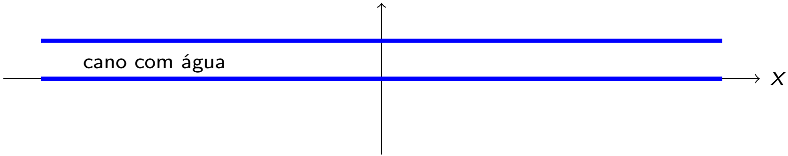
- A equação de difusão não respeita causalidade relativísitica – informação (modos de Fourier com k grande) pode viajar mais rápido que a velocidade de luz
- Isso ocorre porque a Lei de Fick (que usamos para derivar a equação) é válida apenas para sistemas que variam muito lentamente em espaço e tempo
- Última aula: derivemos uma equação mais geral (Equação de Maxwell-Cattaneo), válida mesmo para sistemas relativísticas. A custa é a indrodução de uma nova quantidade o tempo de relaxação

$$\tau_0 \partial_t^2 \rho + \partial_t \rho - D_0 \partial_x^2 \rho = 0, \quad \tau_0, D_0 > 0$$

Problema de sal: Equação de Maxwell-Cattaneo

- Exemplo: Vamos resolver o "problema do sal", mas agora usando a equação de Maxell-Cattaneo.

$$\tau_0 \partial_t^2 \rho + \partial_t \rho - D_0 \partial_x^2 \rho = 0$$



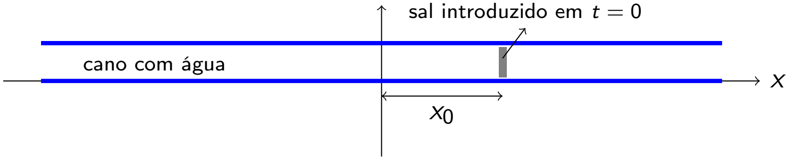
- Novamente, $\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(t,x) A = M \to$ finito
- Condições iniciais: $\rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x)$; $\partial_t \rho(0,x) = 0$

  (Precisamos especificar mais uma condição pois nossa equação para ρ tem 2 derivadas no tempo).
- Condições de contorno: $\rho(t, \pm\infty) = 0$

Problema de sal: Equação de Maxwell-Cattaneo

- Exemplo: Vamos resolver o "problema do sal", mas agora usando a equação de Maxell-Cattaneo.

$$\tau_0 \partial_t^2 \rho + \partial_t \rho - D_0 \partial_x^2 \rho = 0$$



- Novamente, $\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(t, x) A = M \rightarrow$ finito
- Condições iniciais: $\rho(0, x) = \frac{M}{A}\delta(x); \quad \partial_t \rho(0, x) = 0$
  (Precisamos especificar mais uma condição pois nossa equação para ρ tem 2 derivadas no tempo).
- Condições de contorno: $\rho(t, \pm\infty) = 0$

Problema de sal: Equação de Maxwell-Cattaneo

- A equação de Maxwell-Cattaneo é

$$\tau_0 \partial_t^2 \rho + \partial_t \rho - D_0 \partial_x^2 \rho = 0, \quad \tau_0, D_0 > 0$$

- Fazendo Fourier (nesse caso só em x como no problema do sal),

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\rho}(t,k)$$

  e jogando na EDP encontramos

$$\tau_0 \partial_t^2 \tilde{\rho}(t,k) + \partial_t \tilde{\rho}(t,k) + D_0 k^2 \tilde{\rho}(t,k) = 0$$

- Essa é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem.
- Vamos jogar o ansatz: $e^{-i\omega(k)t}$ na equação para encontrar

$$-\omega^2(k)\tau_0 + i\omega(k) + D_0 k^2 = 0$$

Problema de sal: Equação de Maxwell-Cattaneo

- Vimos antes que $\omega(k) = \dfrac{i \mp i\sqrt{1 - 4k^2 D_0\tau_0}}{2\tau_0}$
- Assim, a solução geral é

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(t,k) &= C_1 e^{-\frac{t}{2\tau_0}\left(1-\sqrt{1-4k^2D_0\tau_0}\right)} + C_2 e^{-\frac{t}{2\tau_0}\left(1+\sqrt{1-4k^2D_0\tau_0}\right)} \\ &= e^{-\frac{t}{2\tau_0}}\left[C_1 e^{\frac{t}{2\tau_0}\sqrt{1-4k^2D_0\tau_0}} + C_2 e^{-\frac{t}{2\tau_0}\sqrt{1-4k^2D_0\tau_0}}\right]\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 devem ser determinados das condições iniciais:

$$\rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x)$$

- Como $\quad \tilde{\rho}(t,k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\rho(t,x), \quad$ vemos que

$$\tilde{\rho}(0,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\rho(0,x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\delta(x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$$

como antes.

Problema de sal: Equação de Maxwell-Cattaneo

- A outra condição inicial:

$$\partial_t \tilde{\rho}(t,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \partial_t \rho(t,x)$$

$$\partial_t \tilde{\rho}(0,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \partial_t \rho(0,x) = 0$$

- Comparando com nossa solução

$$\tilde{\rho}(t,k) = e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left[C_1 e^{\frac{t}{2\tau_0}\sqrt{1-4k^2 D_0 \tau_0}} + C_2 e^{-\frac{t}{2\tau_0}\sqrt{1-4k^2 D_0 \tau_0}} \right]$$

$$\tilde{\rho}(0,k) = C_1 + C_2 = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$$

$$\partial_t \tilde{\rho}(0,k) = \frac{C_1}{2\tau_0}\left(1 - \sqrt{1-4k^2 D_0 \tau_0}\right) - \frac{C_2}{2\tau_0}\left(1 + \sqrt{1-4k^2 D_0 \tau_0}\right)$$

$$\implies C_1 = -C_2 \frac{1+\sqrt{1-4k^2 D_0 \tau_0}}{1-\sqrt{1-4k^2 D_0 \tau_0}}$$

Problema de sal: Equação de Maxwell-Cattaneo

$$C_1 = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} - C_2$$

$$-C_2 \frac{1+\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}}{1-\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}} = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}} - C_2$$

$$C_2 \left[1 - \frac{1+\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}}{1-\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}}\right] = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$$

$$C_2(-2)\frac{\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}}{1-\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}} = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$$

$$C_2 = \frac{M}{A\sqrt{8\pi}} \frac{\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}-1}{\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}}$$

$$C_1 = -\frac{M}{A\sqrt{8\pi}} \left(\frac{\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}-1}{\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}}{1-\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}}\right)$$

Problema de sal: Equação de Maxwell-Cattaneo

- Nossa solução (até agora) é

$$\tilde{\rho}(t,k) = \frac{M}{A\sqrt{8\pi}} \frac{e^{-\frac{t}{2\tau_0}}}{\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}} \left[\cosh\left(\frac{t}{2\tau_0}\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0} \right) \right.$$
$$\left. + \sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0}\, \mathrm{senh}\left(\frac{t}{2\tau_0}\sqrt{1-4k^2 D_0\tau_0} \right) \right]$$

- Agora é só fazer o inverso Fourier para achar $\rho(t,x)$. (Vejam o livro de Morse e Feshbach, vol. 1).

Função de Green da equação de difusão

- Considere a equação de difusão de calor em 1D

$$\partial_t T(t,x) = c\partial_x^2 T(t,x)$$

onde queremos encontrar a distribuição de temperatura $T(t,x)$ em um sólido infinito dada uma temperatura inicial

$$T(0,x) = f(x)$$

- Nada depende de y ou z e assim, podemos fazer a transformada de Fourier em x

$$T(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{T}(t,k)$$

(Lembram que transformadas de Fourier são úteis na resolução desses EDPs quando as condições de contorno envolvem uma região ilimitada.)

Função de Green da equação de difusão

- Assim, da EDP encontramos

$$\partial_t T(t,x) = c\partial_x^2 T(t,x) \implies \partial_t \tilde{T}(t,k) = -ck^2 \tilde{T}(t,k)$$

- e assim $\quad \tilde{T}(t,k) = \tilde{T}(0,k)e^{-k^2 ct}, \quad$ onde

$$\tilde{T}(0,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} T(0,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

- e dessa forma

$$\tilde{T}(t,k) = e^{-k^2 ct} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x')$$

- Tomando a inversa agora encontramos

$$\begin{aligned} T(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{T}(t,k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} e^{-k^2 ct} \end{aligned}$$

Função de Green da equação de difusão

- $T(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} e^{-k^2 ct}$
- Já fizemos a integral em k antes. O resultado é

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} e^{-k^2 ct} = \frac{1}{\sqrt{4\pi tc}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4tc}}$$

e assim vemos que

$$\begin{aligned} T(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi tc}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-\frac{(x-x')^2}{4tc}} f(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x', t-t_0) T(t_0, x') \end{aligned}$$

onde aqui $t_0 = 0$ e

$$G(x-x', t-t') \frac{1}{\sqrt{4\pi c(t-t')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t-t')c}}$$

é a função de Green da equação de difusão!

Função de Green da equação de difusão

- $G(x-x',t-t')\dfrac{1}{\sqrt{4\pi c(t-t')}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t-t')c}}$
- Note que agora temos a solução geral para esse problema de difusão (homogênea) no caso de um meio infinito.
- Uma vez que sabemos $G(x-x')$ podemos facilmente resolver aquele problema da "concentração' de sal" onde naquele caso

$$T(0,x)=\frac{M}{A}\delta(x)$$

e assim

$$T(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,G(x-x',t)\frac{M}{A}\delta(x)=\frac{M}{A}G(x,t)\ =\frac{M}{A\sqrt{4\pi ct}}e^{-\frac{x^2}{4tc}}$$

como vimos antes.
- Exercício: verifique que a função de Green satisfaz a relação definidora:

$$\partial_t G(x-x',t-t')-c\partial_x^2 G(x-x',t-t')=\delta(t-t')\delta(x-x')$$

- Funções de Green são muito úteis para esse tipo de problema envolvendo condições de contorno no infinito. Vocês verão em Fismat

Função de Green da equação de difusão

- Note que agora temos a solução geral para esse problema de difusão (homogênea) no caso de um meio infinito.
- Uma vez que sabemos $G(x-x')$ podemos facilmente resolver aquele problema da "concentração' de sal" onde naquele caso

$$T(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x)$$

e assim

$$T(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x',t)\frac{M}{A}\delta(x) = \frac{M}{A}G(x,t) \ = \frac{M}{A\sqrt{4\pi ct}}e^{-\frac{x^2}{4tc}}$$

como vimos antes.
- Exercício: verifique que a função de Green satisfaz a relação definidora:

$$\partial_t G(x-x',t-t') - c\partial_x^2 G(x-x',t-t') = \delta(t-t')\delta(x-x')$$

- Funções de Green são muito úteis para esse tipo de problema envolvendo condições de contorno no infinito. Vocês verão em Fismat II mais detalhes sobre funções de Green.