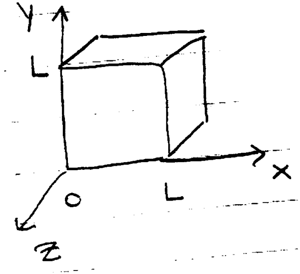
Separação de variáveis: Condução de Calor

- Queiremos encontrar a temperature dentro de um cubo de lado L, que estava inicialmente com $T=0$, que no tempo $t=0$ é imerso num banho térmico com temperatura T_0. Encontre a temperatura $T(t,\vec{x})$ do cubo usando que esse fenômeno pode ser descrito pela equação de condução de calor

$$\partial_t T(t,\vec{x}) = k\nabla^2 T(t,\vec{x}), \quad k>0$$



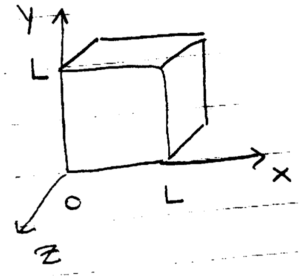
- Condições de contorno:

$$T = T_0 \text{ se } x = 0, L$$
$$T = T_0 \text{ se } y = 0, L$$
$$T = T_0 \text{ se } z = 0, L$$

- Condição inicial: $T(0,\vec{x}) = 0$

- Queiremos encontrar a temperature dentro de um cubo de lado L, que estava inicialmente com $T = 0$, que no tempo $t = 0$ é imerso num banho térmico com temperatura T_0. Encontre a temperatura $T(t, \vec{x})$ do cubo usando que esse fenômeno pode ser descrito pela equação de condução de calor

$$\partial_t T(t, \vec{x}) = k\nabla^2 T(t, \vec{x}), \quad k > 0$$



- Condições de contorno:

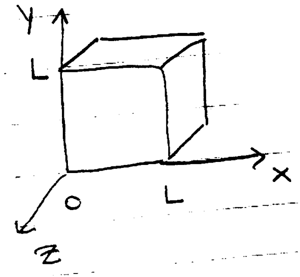
$$T = T_0 \text{ se } x = 0, L$$
$$T = T_0 \text{ se } y = 0, L$$
$$T = T_0 \text{ se } z = 0, L$$

- Condição inicial: $T(0, \vec{x}) = 0$

Separação de variáveis: Condução de Calor

- Queiremos encontrar a temperature dentro de um cubo de lado L, que estava inicialmente com $T = 0$, que no tempo $t = 0$ é imerso num banho térmico com temperatura T_0. Encontre a temperatura $T(t, \vec{x})$ do cubo usando que esse fenômeno pode ser descrito pela equação de condução de calor

$$\partial_t T(t, \vec{x}) = k\nabla^2 T(t, \vec{x}), \quad k > 0$$



- Condições de contorno:

$$T = T_0 \text{ se } x = 0, L$$
$$T = T_0 \text{ se } y = 0, L$$
$$T = T_0 \text{ se } z = 0, L$$

- Condição inicial: $T(0, \vec{x}) = 0$

$$\begin{aligned}\partial_t T(t,\vec{x}) &= k\nabla^2 T(t,\vec{x}), \quad k>0\\ T_0 &= T(t,0,y,z) = T(t,L,y,z) = T(t,x,0,z) = T(t,x,L,z)\\ &= T(t,x,y,0) = T(t,x,y,L)\end{aligned}$$

- Vamos usar separação de variáveis.
- No limite $t \to \infty$, é esperado que esse cubo ficará com temperatura uniforme T_0 (aquela do reservatório). Assim, escrevemos

$$T(t,\vec{x}) = T_0 + \delta T(t,x,y,z)$$

- Note que a constante T_0 não muda a equação diferencial. A única mudança é nas condições de contorno, que ficam mais simples

$$\delta T(t,0,y,z) = \delta T(t,L,y,z) = 0$$

etc.

Separação de variáveis: Condução de Calor

$$\partial_t \delta T(t,\vec{x}) = k\nabla^2 \delta T(t,\vec{x}), \quad k>0$$
$$0 = \delta T(t,0,y,z) = \delta T(t,L,y,z) = \delta T(t,x,0,z) = \delta T(t,x,L,z)$$
$$= \delta T(t,x,y,0) = \delta T(t,x,y,L)$$

- Vamos usar separação de variáveis.
- No limite $t \to \infty$, é esperado que esse cubo ficará com temperatura uniforme T_0 (aquela do reservatório). Assim, escrevemos

$$T(t,\vec{x}) = T_0 + \delta T(t,x,y,z)$$

- Note que a constante T_0 não muda a equação diferencial. A única mudança é nas condições de contorno, que ficam mais simples

$$\delta T(t,0,y,z) = \delta T(t,L,y,z) = 0$$

etc.

- Então, vamos jogar na equação de difusão

$$\delta T(t,\vec{x}) = f(t)G(x,y,z)$$
$$G(x,y,z)\partial_t f(t) = kf(t)\nabla^2 G(x,y,z)$$

- Divide por $\delta T = fG$:

$$\frac{1}{f(t)}\partial_t f(t) = \frac{k}{G(x,y,z)}\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right] G(x,y,z) = -\lambda$$

onde λ é um constante de separação (até agora não é necessariamente positivo nem real).

- Assim, temos a equação

$$f'(t) = -\lambda f(t)$$
$$\implies f(t) = e^{-\lambda t}$$

- Como a equação é da primeira ordem, só tem uma solução (linearmente independente).

Separação de variáveis: Condução de Calor

- A equação espacial é

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right] G(x,y,z) + \frac{\lambda}{k} G(x,y,z) = 0$$

- Usando separação de variáveis mais uma vez,

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= X(x)Y(y)Z(z) \\ \implies 0 &= \frac{1}{X}\partial_x^2 X + \frac{1}{Y}\partial_y^2 Y + \frac{1}{Z}\partial_z^2 Z + \frac{\lambda}{k} \\ &= -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \frac{\lambda}{k} \end{aligned}$$

- Cada termo é constante, e então temos 3 mais constantes de separação (também não são necessariamente positivos).
- Cada função satisfaz uma equação da mesma forma

$$0 = \partial_x^2 X(x) + \alpha^2 X(x) = \partial_y^2 Y(y) + \beta^2 Y(y) = \partial_z^2 Z(z) + \gamma^2 Z(z)$$

com as mesmas condições de contorno
$0 = X(0) = X(L) = Y(0) = Y(L) = Z(0) = Z(L)$

$$0 = \partial_x^2 X(x) + \alpha^2 X(x)$$

- A solução geral pode ser escrito em formas equivalentes

$$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} = A' \,\text{sen}(\alpha x) + B' \cos(\alpha x)$$

com

$$A = \frac{B' - iA'}{2}, \qquad B = \frac{B' + iA'}{2}$$

- A condição de contorno $X(0) = 0$ implica que $B' = A + B = 0$.

$$X(x) = \text{sen}(\alpha x)$$

- A condição de contorno $X(L) = 0$ implica que α é necessariamente real, com valores discretos $\alpha = \ell\pi/L$ com $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.

Separação de variáveis: Condução de Calor

$$0 = \partial_x^2 X(x) + \alpha^2 X(x)$$

- A solução geral pode ser escrito em formas equivalentes

$$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} = A' \operatorname{sen}(\alpha x) + B' \cos(\alpha x)$$

com

$$A = \frac{B' - iA'}{2}, \qquad B = \frac{B' + iA'}{2}$$

- A condição de contorno $X(0) = 0$ implica que $B' = A + B = 0$.

$$X(x) = \operatorname{sen}(\alpha x)$$

- A condição de contorno $X(L) = 0$ implica que α é necessariamente real, com valores discretos $\alpha = \ell\pi/L$ com $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.

$$0 = \partial_x^2 X(x) + \alpha^2 X(x)$$

- A solução geral pode ser escrito em formas equivalentes

$$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} = A' \operatorname{sen}(\alpha x) + B' \cos(\alpha x)$$

com

$$A = \frac{B' - iA'}{2}, \qquad B = \frac{B' + iA'}{2}$$

- A condição de contorno $X(0) = 0$ implica que $B' = A + B = 0$.

$$X(x) = \operatorname{sen}(\alpha x)$$

- A condição de contorno $X(L) = 0$ implica que α é necessariamente real, com valores discretos $\alpha = \ell\pi/L$ com $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.

Separação de variáveis: Condução de Calor

- Semelhantemente, temos

$$Y(y) = \text{sen}(\frac{m\pi y}{L}), \qquad Z(z) = \text{sen}(\frac{n\pi z}{L})$$

e a constante λ tem valores discretos

$$\lambda \to \lambda_{\ell,m,n} = \frac{k\pi^2}{L^2}\left(\ell^2 + m^2 + n^2\right)$$

- Isso acontece naturalmente quando a região é limitada.
- Então, até agora nossa solução é

$$T(t,\vec{x}) = T_0 + \sum_{\ell,m,n=1}^{\infty} C_{\ell,m,n} e^{-\lambda_{\ell mn} t} \,\text{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

- Isso satisfaz as condições de contorno por construção
- Quando $t \to \infty$, vemos que $T(\infty,\vec{x}) = T_0$ (uniforme), como esperado.

Separação de variáveis: Condução de Calor

- Agora, temos também a condição inicial

$$T(0,\vec{x}) = 0 \implies \delta T(0,\vec{x}) = T(0,\vec{x}) - T_0 = -T_0$$
$$= \sum_{\ell,m,n=1}^{\infty} C_{\ell,m,n} \operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

- Para encontrar os coeficientes $C_{\ell,m,n}$, usamos o ortogonalidade das funções senos:

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx \operatorname{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right) = \delta_{\ell',\ell}$$

- Então podemos fazer um projeção:

$$C_{\ell,m,n} = \frac{8}{L^2}\int_0^L dxdydz \operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \delta T(0,\vec{x})$$

Separação de variáveis: Condução de Calor

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx \,\text{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right) = \delta_{\ell',\ell}$$

$$\frac{8}{L^2}\int_0^L dxdydz\,\text{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n'\pi z}{L}\right)\delta T(0,\vec{x})$$

$$= \frac{8}{L^2}\int_0^L dxdydz\,\text{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n'\pi z}{L}\right)$$

$$\cdot \sum_{\ell,m,n=1}^{\infty} C_{\ell,m,n}\,\text{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

$$= \sum_{\ell,m,n=1}^{\infty} C_{\ell,m,n}\delta_{\ell',\ell}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'} = C_{\ell',m',n'}$$

Separação de variáveis: Condução de Calor

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx \,\mathrm{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right) = \delta_{\ell',\ell}$$

$$\frac{8}{L^2}\int_0^L dxdydz \,\mathrm{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n'\pi z}{L}\right)\delta T(0,\vec{x})$$

$$= \frac{8}{L^2}\int_0^L dxdydz \,\mathrm{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n'\pi z}{L}\right)$$

$$\cdot \sum_{\ell,m,n=1}^{\infty} C_{\ell,m,n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

$$= \sum_{\ell,m,n=1}^{\infty} C_{\ell,m,n}\delta_{\ell',\ell}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'} = C_{\ell',m',n'}$$

$$= \frac{8}{L^3}\int_0^L dxdydz \,\mathrm{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)(-T_0)$$

Separação de variáveis: Condução de Calor

$$C_{\ell',m',n'} = \frac{8}{L^3}\int_0^L dxdydz \,\text{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m'\pi y}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)(-T_0)$$

- Usando que

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx\,\text{sen}\left(\frac{\ell'\pi x}{L}\right) = 2\frac{1-\cos(\ell'\pi)}{\ell'\pi} = 2\frac{1-(-1)^{\ell'}}{\ell'\pi}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{se } \ell' = 2p \\ \frac{4}{\ell'\pi}, & \text{se } \ell' = 2p+1 \end{cases}$$

- Temos que para todos ℓ', m', n' impares

$$C_{\ell',m,n} = -\frac{64\,T_0}{\ell' m' n' \pi^3}$$

e quando um de ℓ', m', n' é par, se anula.

Separação de variáveis: Condução de Calor

- Dessa forma, temos que para $t \geq 0$

$$T(t,\vec{x}) = T_0\left[1 - \frac{64}{\pi^3} \sum_{\ell,m,n \text{ impares}} \frac{1}{\ell m n} \operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-(\ell^2+m^2+n^2)\frac{k\pi^2}{L^2}t}\right]$$

- Essa é a nossa solução final que obedece tanto as condições iniciais quanto as de contorno.
- Quando $t \gg \frac{L^2}{k}$, somente o primeiro termo contribui de forma significante e assim

$$\lim_{t \gg L^2/k} T(t,\vec{x}) \simeq T_0\left[1 - \frac{64}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{-\frac{3k\pi^2}{L^2}t}\right]$$

- Dessa forma, temos que para $t \geq 0$

$$T(t,\vec{x}) = T_0\Bigg[1 - \frac{64}{\pi^3}\sum_{\ell,m,n \text{ impares}} \frac{1}{\ell m n} \operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-(\ell^2+m^2+n^2)\frac{k\pi^2}{L^2}t}\Bigg]$$

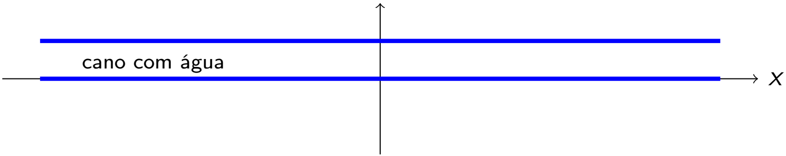
- Essa é a nossa solução final que obedece tanto as condições iniciais quanto as de contorno.
- Quando $t \gg \frac{L^2}{k}$, somente o primeiro termo contribui de forma significante e assim

$$\lim_{t\gg L^2/k} T(t,\vec{x}) \simeq T_0\left[1 - \frac{64}{\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{-\frac{3k\pi^2}{L^2}t}\right]$$

Uso de Transformadas de Fourier e Laplace

- Exemplo: Um cano muito longo está cheio de água. No instante $t = 0$, introduzimos uma certa quantidade de sal em um certo ponto x_0 (distante de ambos as extremas do cano). Ache a concentração de sal em um instante posterior assumindo que a densidade de sal $\rho(t,x)$ obedece a equação de difusão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho, \quad D > 0$$



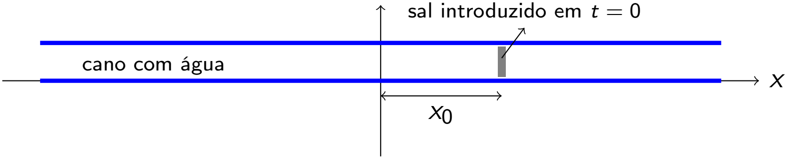
- As condições iniciais são: só há sal no x_0 e aí colocamos uma massa M de sal naquela posição no cano de seção reta A. Assim,

$$\rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x - x_0)$$

Uso de Transformadas de Fourier e Laplace

- Exemplo: Um cano muito longo está cheio de água. No instante $t = 0$, introduzimos uma certa quantidade de sal em um certo ponto x_0 (distante de ambos as extremas do cano). Ache a concentração de sal em um instante posterior assumindo que a densidade de sal $\rho(t, x)$ obedece a equação de difusão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho, \quad D > 0$$

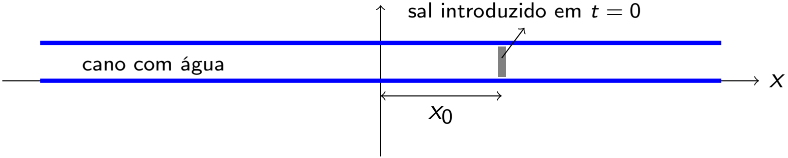


- As condições iniciais são: só há sal no x_0 e aí colocamos uma massa M de sal naquela posição no cano de seção reta A. Assim,

$$\rho(0, x) = \frac{M}{A} \delta(x - x_0)$$

- Exemplo: Um cano muito longo está cheio de água. No instante $t = 0$, introduzimos uma certa quantidade de sal em um certo ponto x_0 (distante de ambos as extremas do cano). Ache a concentração de sal em um instante posterior assumindo que a densidade de sal $\rho(t, x)$ obedece a equação de difusão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho, \quad D > 0$$



- As condições iniciais são: só há sal no x_0 e aí colocamos uma massa M de sal naquela posição no cano de seção reta A. Assim,

$$\rho(0, x) = \frac{M}{A} \delta(x - x_0)$$

Uso de Transformadas de Fourier e Laplace

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho, \quad D > 0; \qquad \rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x - x_0)$$

- E as condições de contorno: $\lim_{x\to\pm\infty} \rho(t,x) = 0, \quad \forall t$
  que reflete a conservação do sal.
- Note que agora nossas condições de contorno são especificadas no infinito. Nos problemas anteriores, nossas condições de contorno sempre foram estabelecidas numa região finita. Achamos naqueles exemplos, basicamente, com uma série de Fourier. Nesse caso agora, como a função é especificada no infinito, será conveniente usar transformada de Fourier na coordinada x.
- Como o sal é conservado, $\int_{-\infty}^{\infty} dx A\rho(t,x) = M, \qquad \text{(finito)}\ \forall t$
- Isso implica que a transformada de Fourier existe pois

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\rho(t,x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t,x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$$

é finito (note também que $\rho \geq 0$).

Uso de Transformadas de Fourier e Laplace

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho, \quad D > 0; \qquad \rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x - x_0)$$

- E as condições de contorno: $\lim_{x\to\pm\infty} \rho(t,x) = 0, \quad \forall t$
  que reflete a conservação do sal.
- Note que agora nossas condições de contorno são especificadas no infinito. Nos problemas anteriores, nossas condições de contorno sempre foram estabelecidas numa região finita. Achamos naqueles exemplos, basicamente, com uma série de Fourier. Nesse caso agora, como a função é especificada no infinito, será conveniente usar transformada de Fourier na coordinada x.
- Como o sal é conservado, $\int_{-\infty}^{\infty} dx A\rho(t,x) = M, \qquad \text{(finito)}\ \forall t$
- Isso implica que a transformada de Fourier existe pois

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\rho(t,x)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t,x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$$

é finito (note também que $\rho \ge 0$).

Uso de Transformadas de Fourier e Laplace

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho, \quad D > 0; \qquad \rho(0, x) = \frac{M}{A}\delta(x - x_0)$$

- E as condições de contorno: $\lim_{x \to \pm\infty} \rho(t, x) = 0, \quad \forall t$ que reflete a conservação do sal.
- Note que agora nossas condições de contorno são especificadas no infinito. Nos problemas anteriores, nossas condições de contorno sempre foram estabelecidas numa região finita. Achamos naqueles exemplos, basicamente, com uma série de Fourier. Nesse caso agora, como a função é especificada no infinito, será conveniente usar transformada de Fourier na coordinada x.
- Como o sal é conservado, $\int_{-\infty}^{\infty} dx A\rho(t, x) = M, \quad$ (finito) $\forall t$
- Isso implica que a transformada de Fourier existe pois

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \rho(t, x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}$$

é finito (note também que $\rho \geq 0$).

Transformadas de Fourier: difusão

- Vamos então considerar a transformada (inversa) de Fourier

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\rho}(t,k)$$

e usamos agora isso na equação de difusão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \partial_t \tilde{\rho}(t,k) = \frac{D}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\rho}(t,k) \partial_x^2 \left(e^{ikx} \right) \tilde{\rho}(t,k)$$

$$= \frac{D}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\rho}(t,k)(-k^2) \left(e^{ikx} \right) \tilde{\rho}(t,k)$$

- Assim,

$$\partial_t \tilde{\rho}(t,k) + k^2 D \tilde{\rho}(t,k) = 0$$

- A solução geral é

$$\tilde{\rho}(t,k) = \tilde{\rho}(t,0) e^{-Dk^2 t}$$

Transformadas de Fourier: difusão

- Note que, em geral, interpretamos $\rho(t,x)$ como uma distribuição. Vamos ver a condição inicial

$$\rho(0,x) = \frac{M}{A}\delta(x - x_0)$$

- Agora, a transformada de Fourier disso é

$$\tilde{\rho}(0,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\rho(0,x) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}$$

- Vemos que $\tilde{\rho}(t,k) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}e^{-tDk^2}$ é uma gaussiana.
- Temos agora que fazer a inversão para encontrar $\rho(t,x)$. Assim,

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}\tilde{\rho}(t,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}\frac{M}{A\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}e^{-tDk^2}$$
$$= \frac{M}{A2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ik(x-x_0)-tDk^2}$$

- É uma gaussiana deslocada. Completamos o quadrado:

$$\rho(t,x) = \frac{M}{A2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ik(x-x_0)-tDk^2}$$

- É uma gaussiana deslocada. Completamos o quadrado:

$$ik(x-x_0) - tDk^2 = -tD\left[k - \frac{i(x-x_0)}{2tD}\right]^2 - \frac{(x-x_0)^2}{4tD}$$

- Assim,

$$\rho(t,x) = \frac{M}{2\pi A} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-tD\left[k-\frac{i(x-x_0)}{2tD}\right]^2}$$

- Mudando variáveis:

$$\eta \equiv k - i\frac{(x-x_0)^2}{2tD} \qquad \Longrightarrow \quad d\eta = dk$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-tD\eta^2} = \sqrt{\frac{\pi}{tD}}$$

- Vemos que

$$\rho(t,x) = \frac{M}{2\pi A} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-tD\left[k-\frac{i(x-x_0)}{2tD}\right]^2}$$

$$= \frac{M}{A}\left(\frac{1}{4\pi tD}\right)^{1/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}}$$

- Note que essa solução obedece as condições de contorno pois $\rho(t,\pm\infty) = 0$.
- É interessante notar q quando $t \to 0$ essa solução se torna uma delta.

$$\lim_{t\to 0} \frac{M}{A}\left(\frac{1}{4\pi tD}\right)^{1/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}} = \frac{M}{A}\delta(x-x_0)$$

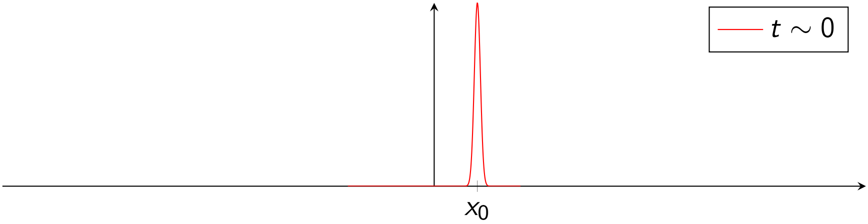
- Isso é fácil de ver pois ela é uma sequencia delta.

Transformadas de Fourier: difusão

- $\rho(t,x) = \frac{M}{A}\left(\frac{1}{4\pi tD}\right)^{1/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}}$
- Além disso, da conservação do sal (implícita na equação de difusão), vemos que de fato

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(t,x) A = M, \quad \forall t$$

pois a gaussiana que encontramos é normalizada.
- Graficamente, nosso $\rho(t,x)$ evolui no tempo assim



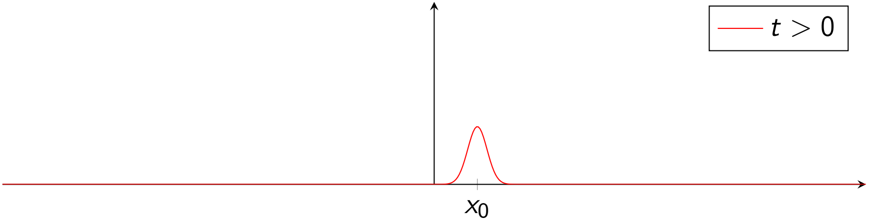
- A largura vai crescendo com tempo.

Transformadas de Fourier: difusão

- $\rho(t,x) = \frac{M}{A}\left(\frac{1}{4\pi tD}\right)^{1/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}}$
- Além disso, da conservação do sal (implícita na equação de difusão), vemos que de fato

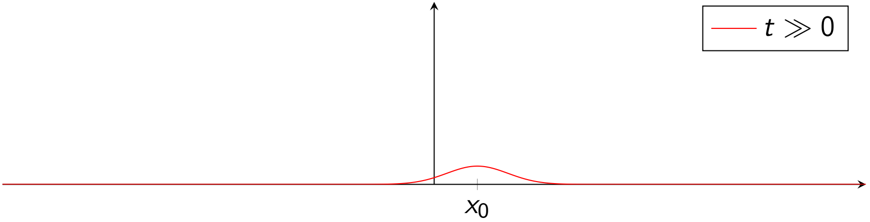
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(t,x) A = M, \quad \forall t$$

pois a gaussiana que encontramos é normalizada.
- Graficamente, nosso $\rho(t,x)$ evolui no tempo assim



- A largura vai crescendo com tempo.

- $\rho(t,x) = \frac{M}{A}\left(\frac{1}{4\pi tD}\right)^{1/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4tD}}$
- Além disso, da conservação do sal (implícita na equação de difusão), vemos que de fato
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(t,x) A = M, \quad \forall t$$
pois a gaussiana que encontramos é normalizada.
- Graficamente, nosso $\rho(t,x)$ evolui no tempo assim



- A largura vai crescendo com tempo.