Separação de variáveis

- Voltamos as equações de Maxwell (na presença de fontes dessa vez)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- Vamos supor que os campos não variam no tempo. Assim, $\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})$ e $\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})$.
- Neste caso, $\rho(t,\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ e $\vec{J}(t,\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$ e as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

- Uma vez que $\nabla\times\vec{E} = 0$, vemos que em <u>eletrostática</u>

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

I.e., o campo elétrico é um gradiente de um potencial.

Separação de variáveis

- Voltamos as equações de Maxwell (na presença de fontes dessa vez)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Vamos supor que os campos não variam no tempo. Assim, $\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})$ e $\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})$.
- Neste caso, $\rho(t, \vec{x}) = \rho(\vec{x})$ e $\vec{J}(t, \vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$ e as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- Uma vez que $\nabla \times \vec{E} = 0$, vemos que em eletrostática

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

I.e., o campo elétrico é um gradiente de um potencial.

Separação de variáveis

- Voltamos as equações de Maxwell (na presença de fontes dessa vez)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Vamos supor que os campos não variam no tempo. Assim, $\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})$ e $\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})$.
- Neste caso, $\rho(t, \vec{x}) = \rho(\vec{x})$ e $\vec{J}(t, \vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$ e as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- Uma vez que $\nabla \times \vec{E} = 0$, vemos que em eletrostática

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

I.e., o campo elétrico é um gradiente de um potencial.

- Neste caso, $\rho(t,\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ e $\vec{J}(t,\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$ e as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

- Uma vez que $\nabla\times\vec{E} = 0$, vemos que em eletrostática

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

I.e., o campo elétrico é um gradiente de um potencial.

- Assim obtemos nesse caso

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}.$$

- Então, o potencial obedece a Equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

- Se $\rho\to 0$ e a equação fica a Equação de Laplace:

Separação de variáveis

- Neste caso, $\rho(t, \vec{x}) = \rho(\vec{x})$ e $\vec{J}(t, \vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$ e as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- Uma vez que $\nabla \times \vec{E} = 0$, vemos que em eletrostática

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

I.e., o campo elétrico é um gradiente de um potencial.

- Assim obtemos nesse caso

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}.$$

- Então, o potencial obedece a Equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

- Se $\rho \to 0$ e a equação fica a Equação de Laplace:

Separação de variáveis

- Neste caso, $\rho(t,\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ e $\vec{J}(t,\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$ e as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

- Uma vez que $\nabla\times\vec{E} = 0$, vemos que em eletrostática

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

  I.e., o campo elétrico é um gradiente de um potencial.
- Assim obtemos nesse caso

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}.$$

- Então, o potencial obedece a Equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

- Se $\rho \to 0$ e a equação fica a Equação de Laplace:

- Neste caso, $\rho(t, \vec{x}) = \rho(\vec{x})$ e $\vec{J}(t, \vec{x}) = \vec{J}(\vec{x})$ e as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- Uma vez que $\nabla \times \vec{E} = 0$, vemos que em eletrostática

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

I.e., o campo elétrico é um gradiente de um potencial.

- Assim obtemos nesse caso

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}.$$

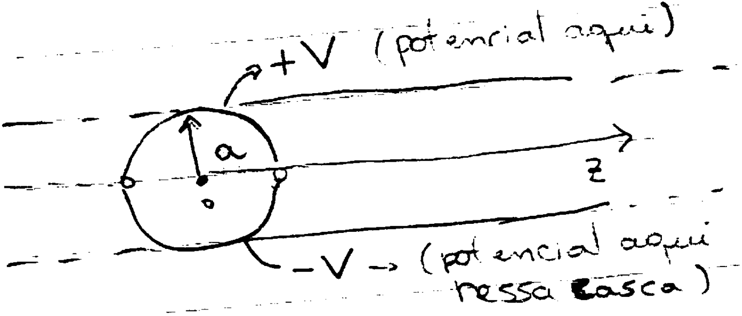
- Então, o potencial obedece a Equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

- Se $\rho \to 0$ e a equação fica a Equação de Laplace.

Separação de variáveis: Equação de Laplace

- Vemos então que em eletrostática, o potencial eletrostático obedece a equação de Laplace numa região onde a densidade de carga $\rho(\vec{x}) = 0$.
- Exemplo: cilindro oco (com raio a) de metal muito longo.



- Ache $\vec{E}(\vec{x})$ no interior do cilindro.

Separação de variáveis: Equação de Laplace

- Nesse problema de eletrostática, dentro do cilindro, a densidade de carga $\rho(\vec{x}) = 0$. Assim, o potencial elétrico satisfaz a Equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = 0$$

- Como o problema tem simetria cilíndrica, vamos escrever o Laplaciano em coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \phi \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi$$

- Claramente, por simetria, vemos que a solução não pode depender de z (o problema tem simetria axial).
- Assim, $\phi(r, \theta, z) = \phi(r, \theta)$.
- As condições de contorno são

$$\phi(r = a, \theta) = \begin{cases} V, & 0 < \theta < \pi \\ -V, & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

Separação de variáveis: Equação de Laplace

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\phi\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\phi = 0$$

$$\phi(r=a,\theta) = \begin{cases} V, & 0<\theta<\pi \\ -V, & -\pi<\theta<0 \end{cases}$$

- Note que ϕ é função periódica de θ com período 2π, $\phi(r,\theta) = \phi(r,\theta+2\pi)$.
- Vamos usar o método de separação de variáveis.
- Procuramoss soluções da forma $\phi(r,\phi) = R(r)\Theta(\theta)$ e assim, jogando de volta em $\nabla^2\phi = 0$ obtemos

$$\frac{\Theta(\theta)}{r}d_r\left(rd_rR(r)\right) + \frac{R(r)}{r^2}d_\theta^2\Theta(\theta) = 0$$

- Multiplique por $r^2/[\Theta(\theta)R(r)]$ para encontrar

$$\frac{r}{R(t)}d_r\left(rd_rR(r)\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}d_\theta^2\Theta(\theta) = \lambda$$

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\phi\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\phi = 0$$

$$\phi(r=a,\theta) = \begin{cases} V, & 0<\theta<\pi \\ -V, & -\pi<\theta<0 \end{cases}$$

- Note que ϕ é função periódica de θ com período 2π, $\phi(r,\theta) = \phi(r,\theta+2\pi)$.
- Vamos usar o método de separação de variáveis.
- Procuramoss soluções da forma $\phi(r,\phi) = R(r)\Theta(\theta)$ e assim, jogando de volta em $\nabla^2\phi = 0$ obtemos

$$\frac{\Theta(\theta)}{r}d_r\left(rd_rR(r)\right) + \frac{R(r)}{r^2}d_\theta^2\Theta(\theta) = 0$$

- Multiplique por $r^2/[\Theta(\theta)R(r)]$ para encontrar

$$\frac{r}{R(t)}d_r\left(rd_rR(r)\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}d_\theta^2\Theta(\theta) = \lambda$$

Separação de variáveis: Equação de Laplace

- Assim,

$$d_\theta^2 \Theta(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0$$
$$\frac{1}{r} d_r \left(r d_r R \right) - \frac{\lambda}{r^2} R = 0$$

- Como $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ é periódica em θ a solução geral dessa equação é uma combinação de senos e cossenos

$$\Theta(\theta) = A_m \cos(m\theta) + B_n \operatorname{sen}(m\theta)$$
$$\lambda = m^2, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

- Assim, a equação radial fica

$$r d_r \left(r d_r R \right) - m^2 R = 0$$

- Esta é a equação de Euler.

Equação de Euler

- As soluções são monômios:

$$
\begin{aligned}
R(r) &= r^\gamma \\
0 &= r d_r \left(r d_r R \right) - m^2 R = \gamma r d_r r^\gamma - m^2 r^\gamma = \gamma^2 r^\gamma - m^2 r^\gamma \\
\implies \gamma^2 &= m^2 \\
\gamma &= \pm m \\
R(r) &= r^{\pm m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

- Entretanto, nós devemos impor que $\vec{E} = -\nabla\phi$ seja bem definido em $r = 0$ e assim, desprezaremos a solução r^{-m}.
- Dessa forma, nossa solução geral é

$$\phi(r, \theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta) \right]$$

que deve satisfazer os condições de contorno.

Equação de Euler

- As soluções são monômios:

$$
\begin{aligned}
R(r) &= r^{\gamma} \\
0 &= r d_r\left(r d_r R\right) - m^2 R = \gamma r d_r r^{\gamma} - m^2 r^{\gamma} = \gamma^2 r^{\gamma} - m^2 r^{\gamma} \\
\implies \gamma^2 &= m^2 \\
\gamma &= \pm m \\
R(r) &= r^{\pm m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

- Entretanto, nós devemos impor que $\vec{E} = -\nabla\phi$ seja bem definido em $r = 0$ e assim, desprezaremos a solução r^{-m}.
- Dessa forma, nossa solução geral é

$$
\phi(r,\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right]
$$

que deve satisfazer os condições de contorno:

Equação de Euler

- As soluções são monômios:

$$
\begin{aligned}
R(r) &= r^{\gamma} \\
0 &= r d_r \left(r d_r R \right) - m^2 R = \gamma r d_r r^{\gamma} - m^2 r^{\gamma} = \gamma^2 r^{\gamma} - m^2 r^{\gamma} \\
\implies \gamma^2 &= m^2 \\
\gamma &= \pm m \\
R(r) &= r^{\pm m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

- Entretanto, nós devemos impor que $\vec{E} = -\nabla \phi$ seja bem definido em $r = 0$ e assim, desprezaremos a solução r^{-m}.
- Dessa forma, nossa solução geral é

$$
\phi(r, \theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta) \right]
$$

que deve satisfazer os condições de contorno:

Equação de Euler

- As soluções são monômios:

$$\begin{aligned} R(r) &= r^\gamma \\ 0 &= r d_r (r d_r R) - m^2 R = \gamma r d_r r^\gamma - m^2 r^\gamma = \gamma^2 r^\gamma - m^2 r^\gamma \\ \implies \gamma^2 &= m^2 \\ \gamma &= \pm m \\ R(r) &= r^{\pm m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

- Entretanto, nós devemos impor que $\vec{E} = -\nabla\phi$ seja bem definido em $r = 0$ e assim, desprezaremos a solução r^{-m}.
- Dessa forma, nossa solução geral é

$$\phi(r,\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right]$$

que deve satisfazer os condições de contorno:

- As soluções são monômios:

$$
\begin{aligned}
R(r) &= r^\gamma \\
0 &= r d_r \left(r d_r R \right) - m^2 R = \gamma r d_r r^\gamma - m^2 r^\gamma = \gamma^2 r^\gamma - m^2 r^\gamma \\
\implies \gamma^2 &= m^2 \\
\gamma &= \pm m \\
R(r) &= r^{\pm m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

- Entretanto, nós devemos impor que $\vec{E} = -\nabla\phi$ seja bem definido em $r = 0$ e assim, desprezaremos a solução r^{-m}.
- Dessa forma, nossa solução geral é

$$
\phi(r,\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta) \right]
$$

que deve satisfazer os condições de contorno:

Equação de Euler

- As soluções são monômios:

$$
\begin{aligned}
R(r) &= r^\gamma \\
0 &= r d_r \left(r d_r R \right) - m^2 R = \gamma r d_r r^\gamma - m^2 r^\gamma = \gamma^2 r^\gamma - m^2 r^\gamma \\
\implies \gamma^2 &= m^2 \\
\gamma &= \pm m \\
R(r) &= r^{\pm m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

- Entretanto, nós devemos impor que $\vec{E} = -\nabla\phi$ seja bem definido em $r = 0$ e assim, desprezaremos a solução r^{-m}.
- Dessa forma, nossa solução geral é

$$
\phi(r,\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta) \right]
$$

que deve satisfazer os condições de contorno:

Separação de variáveis: Equação de Laplace

- Dessa forma, nossa solução geral é

$$\phi(r,\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right]$$

que deve satisfazer os condições de contorno

$$\phi(a,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} V, & 0 < \theta < \pi \\ -V, & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

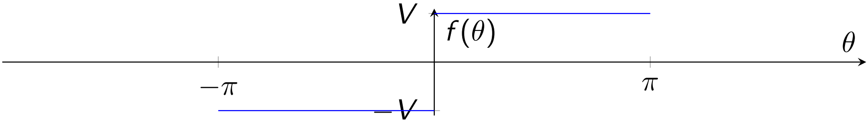
- Então,

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right]$$

- Note que $a^m A_m$ e $a^m B_m$ são coeficientes da série de Fourier de $f(\theta)$.

Separação de variáveis: Equação de Laplace

- $f(\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right]$
- Note que $f(\theta)$ é impar:



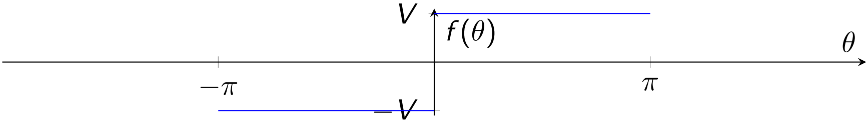
- Assim, $A_0 = 0$, $A_m = 0$.
- Então, $f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a^m B_m \operatorname{sen}(m\theta)$

$$B_m = \frac{1}{a^m \pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\theta) \operatorname{sen}(m\theta) = \frac{2}{a^m \pi} \int_0^{\pi} V \operatorname{sen}(m\theta)$$

$$= \frac{2V}{a^m \pi} \left(-\frac{\cos(m\theta)}{m} \right)_0^{\pi} = \frac{-2V}{a^m \pi m} \left[(-1)^m - 1\right]$$

Separação de variáveis: Equação de Laplace

- $f(\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right]$
- Note que $f(\theta)$ é impar:



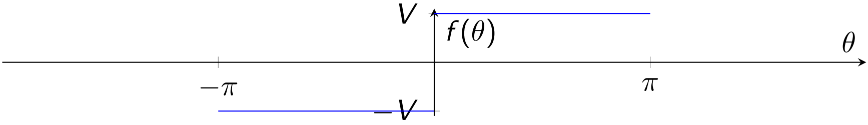
- Assim, $A_0 = 0$, $A_m = 0$.
- Então, $f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a^m B_m \operatorname{sen}(m\theta)$

$$B_m = \frac{1}{a^m \pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\theta) \operatorname{sen}(m\theta) = \frac{2}{a^m \pi} \int_0^{\pi} V \operatorname{sen}(m\theta)$$

$$= \frac{2V}{a^m \pi} \left(-\frac{\cos(m\theta)}{m}\right)_0^{\pi} = \frac{-2V}{a^m \pi m} \left[(-1)^m - 1\right]$$

Separação de variáveis: Equação de Laplace

- $f(\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m \left[A_m \cos(m\theta) + B_m \operatorname{sen}(m\theta)\right]$
- Note que $f(\theta)$ é impar:



- Assim, $A_0 = 0$, $A_m = 0$.
- Então, $f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a^m B_m \operatorname{sen}(m\theta)$

$$B_m = \frac{1}{a^m \pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\theta) \operatorname{sen}(m\theta) = \frac{2}{a^m \pi} \int_0^{\pi} V \operatorname{sen}(m\theta)$$
$$= \frac{2V}{a^m \pi} \left(-\frac{\cos(m\theta)}{m}\right)_0^{\pi} = \frac{-2V}{a^m \pi m} \left[(-1)^m - 1\right]$$

- Então, $f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a^m B_m \operatorname{sen}(m\theta)$

$$B_m = \frac{-2V}{a^m \pi m}\left[(-1)^m - 1\right] = \begin{cases} 0, & m = 2p \\ \frac{4V}{a^m \pi m}, & m = 2p+1 \end{cases}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots.$$

- E finalmente

$$\phi(r,\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} r^m B_m \operatorname{sen}(m\theta) = \frac{4V}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m \operatorname{sen}(m\theta)$$

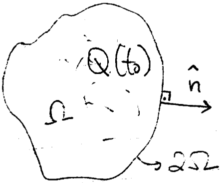
- Exercício: calcule o $\vec{E} = -\nabla\phi$ usando essa solução

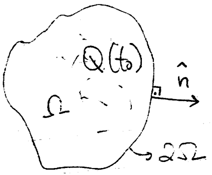
Conservação local de carga

- Em electromagnetismo, dizemos que a carga elétrica é conservada. Isso quer dizer que, se num dado instante de tempo t_0 a carga total numa região Ω é $Q(t_0)$ e se, num outro instante de tempo t medimos

$$Q(t) \neq Q(t_0),$$

  como carga não pode ser destruída ou criada, isso significa que cargas ou entraram em Ω (se $Q(t) > Q(t_0)$) ou saíram de lá (se $Q(t) < Q(t_0)$).
- Isso significa que houve um fluxo, uma corrente de cargas através da fronteira $\partial\Omega$ de Ω.





- Podemos escrever a carga total como um integral de um densidade

$$Q(t) = \int_{\Omega} d^3x \rho(t, \vec{x})$$

e esse fluxo total de carga através de $\partial\Omega$ como

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{J}(t, \vec{x}) \cdot \hat{n}\, da = \oint_{\partial\Omega} \vec{J}(t, \vec{x}) \cdot d\vec{a}$$

onde $\hat{n}$ é vetor (saindo) da $\partial\Omega$ e "da" o elemento infinitesimal da área.

- Dessa forma, vemos que

$$\frac{d}{dt} Q(t) = -\oint_{\partial\Omega} \vec{J}(t, \vec{x}) \cdot d\vec{a}$$

Equação de Difusão

- Usando que $Q(t) = \int_\Omega d^3x \rho(t,\vec{x})$, e a teorema de Gauss

  $-\oint_{\partial\Omega} \vec{J}(t,\vec{x}) \cdot d\vec{a} = -\int_\Omega \nabla \cdot \vec{J} d^3x$, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Q(t) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega d^3x \rho(t,\vec{x}) \\
&= \int_\Omega d^3x \frac{d}{dt}\rho(t,\vec{x}) \\
&= -\int_\Omega d^3x \nabla \cdot \vec{J} \\
\implies 0 &= \int_\Omega d^3x \left[\frac{d}{dt}\rho(t,\vec{x}) + \nabla \cdot \vec{J}\right]
\end{aligned}$$

- Como essa relação é válido para qualquer região Ω, chegamos na forma diferencial da conservação de corrente elétrica

$$\frac{d}{dt}\rho(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Equação de Difusão

- Conservação local de carga $\quad \frac{d}{dt}\rho(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$
- Para vários tipos de problemas a relação empírica se aplica:

$$\vec{J} = -D\,\vec{\nabla}\rho$$

  ("lei" de Fick), onde $D > 0$ é o coeficiente de difusão.
  I.e., movimento da carga tende a homogenizar o sistema. Carga se move de áreas de alta concentração para áreas de baixa concentração.
- Caso de fato essa aproximação seja aplicável, podemos usar a lei de Fick na equação de continuidade

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{J} = 0$$
$$\rightarrow \partial_t\rho - \nabla\left[D\,\nabla\rho\right] = 0$$

- Se o coeficiente de difusão D é constante então chegamos a famoso equação de difusão

$$\partial_t\rho - D\,\nabla^2\rho = 0$$

Condução de Calor

- Equação de difusão $\quad \partial_t \rho - D\,\nabla^2 \rho = 0$
- Em vez de carga elétrica, pode descrever uma substância que *não é conservada*. I.e., pode ser absorvida (destruída) ou emitida (criada).
- Por exemplo, um fluxo de nêutrons num reator nuclear (que podem ser absorvidas ou emitidos por núcleos), temos que incluir um *termo de fonte* $S(t,\vec{x})$ na equação da continuidade

$$\partial_t \rho - D\,\nabla^2 \rho = S(t,\vec{x})$$

- Pela lei de Fick chegamos nesse caso na equação de difusão *não-homogênea*

$$\partial_t \rho - \nabla \cdot \vec{J} = S(t,\vec{x})$$

- Uma equação similar aparece em problemas simples envolvendo a condução de calor

$$\partial_t T(t,\vec{x}) - k\nabla^2 T(t,\vec{x}) = S(t,\vec{x})$$

onde T é temperatura, k é a condutividade térmica, S a fonte de calor

Condução de Calor

- Equação de difusão $\partial_t \rho - D\,\nabla^2 \rho = 0$
- Em vez de carga elétrica, pode descrever uma substância que *não é conservada*. I.e., pode ser absorvida (destruída) ou emitida (criada).
- Por exemplo, um fluxo de nêutrons num reator nuclear (que podem ser absorvidas ou emitidos por núcleos), temos que incluir um *termo de fonte* $S(t, \vec{x})$ na equação da continuidade

$$\partial_t \rho - D\,\nabla^2 \rho = S(t, \vec{x})$$

- Pela lei de Fick chegamos nesse caso na equação de difusão *não-homogênea*

$$\partial_t \rho - \nabla \cdot \vec{J} = S(t, \vec{x})$$

- Uma equação similar aparece em problemas simples envolvendo a condução de calor

$$\partial_t T(t, \vec{x}) - k\nabla^2 T(t, \vec{x}) = S(t, \vec{x})$$

onde T é temperatura, k é a condutividade térmica, S a fonte de calor

Condução de Calor

- Equação de difusão $\quad \partial_t \rho - D\,\nabla^2 \rho = 0$
- Em vez de carga elétrica, pode descrever uma substância que *não é conservada*. I.e., pode ser absorvida (destruída) ou emitida (criada).
- Por exemplo, um fluxo de nêutrons num reator nuclear (que podem ser absorvidas ou emitidos por núcleos), temos que incluir um *termo de fonte* $S(t, \vec{x})$ na equação da continuidade

$$\partial_t \rho - D\,\nabla^2 \rho = S(t, \vec{x})$$

- Pela lei de Fick chegamos nesse caso na equação de difusão *não-homogênea*

$$\partial_t \rho - \nabla \cdot \vec{J} = S(t, \vec{x})$$

- Uma equação similar aparece em problemas simples envolvendo a condução de calor

$$\partial_t T(t, \vec{x}) - k\nabla^2 T(t, \vec{x}) = S(t, \vec{x})$$

onde T é temperatura, k é a condutividade térmica, S a fonte de calor

Condução de Calor

- Equação de difusão $\quad \partial_t \rho - D\,\nabla^2 \rho = 0$
- Em vez de carga elétrica, pode descrever uma substância que *não é conservada*. I.e., pode ser absorvida (destruída) ou emitida (criada).
- Por exemplo, um fluxo de nêutrons num reator nuclear (que podem ser absorvidas ou emitidos por núcleos), temos que incluir um *termo de fonte* $S(t, \vec{x})$ na equação da continuidade

$$\partial_t \rho - D\,\nabla^2 \rho = S(t, \vec{x})$$

- Pela lei de Fick chegamos nesse caso na equação de difusão *não-homogênea*

$$\partial_t \rho - \nabla \cdot \vec{J} = S(t, \vec{x})$$

- Uma equação similar aparece em problemas simples envolvendo a condução de calor

$$\partial_t T(t, \vec{x}) - k\nabla^2 T(t, \vec{x}) = S(t, \vec{x})$$

onde T é temperatura, k é a condutividade térmica, S a fonte de calor

Separação de variáveis

- Proóxima aula: resolver problema de condução de calor usando o método de separação de variáveis