Método de separação de variáveis

- Vamos começar com um exemplo:
  Equação da onda eletromagnética no vácuo.
- As equações de Maxell no vácuo são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Para mostrar que $\vec{E}(t, \vec{x})$ e $\vec{B}(t, \vec{x})$ obedecem a equação da onda, precisamos saber que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

  para um campo vetorial $\vec{A}(t, \vec{x})$. (Pode provar essa identidade?)
- De fato, tomando $\vec{\nabla}\times$ de

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Método de separação de variáveis

- As equações de Maxell no vácuo são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Para mostrar que $\vec{E}(t, \vec{x})$ e $\vec{B}(t, \vec{x})$ obedecem a equação da onda, precisamos saber que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

para um campo vetorial $\vec{A}(t, \vec{x})$. (Pode provar essa identidade?)
- De fato, tomando $\vec{\nabla}\times$ de

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$= \vec{\nabla}(\cancelto{0}{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}) - \nabla^2 \vec{E}$$

- Então,

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = 0$$

que é a equação da onda para $\vec{E}$.

- Analogamente pode mostrar que

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} - \nabla^2\vec{B} = 0$$

- Agora que temos um exemplo físico onde a equação da onda aparece, vamos voltar ao método de separação de variáveis, usando o exemplo da equação da onda

- Então,

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = 0$$

que é a equação da onda para $\vec{E}$.

- Analogamente pode mostrar que

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} - \nabla^2\vec{B} = 0$$

- Agora que temos um exemplo físico onde a equação da onda aparece, vamos voltar ao método de separação de variáveis, usando o exemplo da equação da onda

Separação de variáveis: Equação da onda

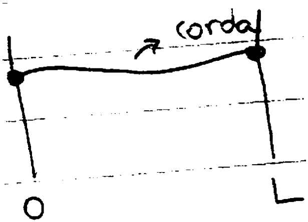
- Suponha que uma dada quantidade ou função $u(t,x)$ obedece a equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u(t,x) = 0$$

com condições de contorno, por exemplo,

$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

- $u(t,x)$ nesse caso poderia ser, por exemplo, a amplitude de uma corda que está amarada em $x = 0$ e $x = L$, que são as extremidades onde ela não se move.



Separação de variáveis: Equação da onda

$$0 = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u(t,x)$$
$$0 = u(t,0) = u(t,L)$$

- Além dessas condições de contorno, para determinar a solução do problema temos que especificar as condições iniciais, que são nesse caso os valures de $u(t,x)$ e $\partial_t u(t,x)$ num dado instante de tempo.
- Vamos supor que

$$u(0,x) = u_0(x)$$
$$\partial_t u(0,x) = v_0(x)$$

  onde u_0 e v_0 são funções conhecidas. É como se fosse uma "foto" da corda e sua velocidade capturada num dado instante de tempo.
- Agora, uma vez que sabemos as condições de contorno e condições iniciais podemos começar a resolver o problema.

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u(t,x) = 0 \qquad\qquad u(0,x) = u_0(x)$$

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \qquad\qquad \partial_t u(0,x) = v_0(x)$$

- O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções da EDP da forma

$$u(t,x) = T(t)\phi(x)$$

- Aqui, $\phi(x)$ é somente função de x enquanto $T(t)$ é somente função de t.
- Ao encontrar a solução mais geral desta forma, a solução final será uma combinação linear desses soluções.
- Para que esse ansatz satisfaça as condições de contorno, vemos que

$$u(t,0) = 0 \implies \phi(0) = 0$$

$$u(t,L) = 0 \implies \phi(L) = 0$$

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u(t,x) = 0$$
$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

$$u(0,x) = u_0(x)$$
$$\partial_t u(0,x) = v_0(x)$$

- O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções da EDP da forma
$$u(t,x) = T(t)\phi(x)$$
- Aqui, $\phi(x)$ é somente função de x enquanto $T(t)$ é somente função de t.
- Ao encontrar a solução mais geral desta forma, a solução final será uma combinação linear desses soluções.
- Para que esse <u>ansatz</u> satisfaça as condições de contorno, vemos que
$$u(t,0) = 0 \implies \phi(0) = 0$$
$$u(t,L) = 0 \implies \phi(L) = 0$$

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u(t,x) = 0$$

$$\phi(0) = \phi(L) = 0$$

$$u(t,x) = T(t)\phi(x)$$
$$u(0,x) = u_0(x)$$
$$\partial_t u(0,x) = v_0(x)$$

- Agora, jogamos o ansatz para $u(t,x)$ na equação diferencial

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$$
$$\left(\frac{1}{c^2} d_t^2 T(t)\right)\phi(x) = T(t) d_x^2 \phi(x)$$

- Vamos agora dividir isso por $T(t)\phi(x)$

$$\frac{1}{c^2 T(t)} d_t^2 T(t) = \frac{1}{\phi(x)} d_x^2 \phi(x)$$

- O lado esquerdo só depende de t e o lado direito só depende de x. Ou seja, o lado esquerdo não depende de x e o lado direito não depende de t. Mas são iguais, então ambos lados devem ser constantes!

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u(t,x) = 0 \qquad u(t,x) = T(t)\phi(x)$$

$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \qquad u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = v_0(x)$$

- Agora, jogamos o ansatz para $u(t,x)$ na equação diferencial

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$$
$$\left(\frac{1}{c^2} d_t^2 T(t)\right)\phi(x) = T(t) d_x^2 \phi(x)$$

- Vamos agora dividir isso por $T(t)\phi(x)$

$$\frac{1}{c^2 T(t)} d_t^2 T(t) = \frac{1}{\phi(x)} d_x^2 \phi(x)$$

- O lado esquerdo só depende de t e o lado direito só depende de x. Ou seja, o lado esquerdo não depende de x e o lado direito não depende de t. Mas são iguais, então ambos lados devem ser constantes!

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u(t,x) = 0 \qquad \begin{aligned} u(t,x) &= T(t)\phi(x) \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \qquad \partial_t u(0,x) = v_0(x)$$

- Agora, jogamos o ansatz para $u(t,x)$ na equação diferencial

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} d_t^2 T(t)\right) \phi(x) = T(t) d_x^2 \phi(x)$$

- Vamos agora dividir isso por $T(t)\phi(x)$

$$\frac{1}{c^2 T(t)} d_t^2 T(t) = \frac{1}{\phi(x)} d_x^2 \phi(x)$$

- O lado esquerdo só depende de t e o lado direito só depende de x. Ou seja, o lado esquerdo não depende de x e o lado direito não depende de t. Mas são iguais, então ambos lados devem ser constantes!

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) u(t,x) = 0 \qquad u(t,x) = T(t)\phi(x)$$

$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \qquad u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = v_0(x)$$

- Agora, jogamos o ansatz para $u(t,x)$ na equação diferencial

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} d_t^2 T(t)\right)\phi(x) = T(t) d_x^2 \phi(x)$$

- Vamos agora dividir isso por $T(t)\phi(x)$

$$\frac{1}{c^2 T(t)} d_t^2 T(t) = \frac{1}{\phi(x)} d_x^2 \phi(x)$$

- O lado esquerdo só depende de t e o lado direito só depende de x. Ou seja, o lado esquerdo não depende de x e o lado direito não depende de t. Mas são iguais, então ambos lados devem ser constantes!

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\frac{1}{c^2 T(t)} d_t^2 T(t) = \lambda = \frac{1}{\phi(x)} d_x^2 \phi(x)$$

- Essa constante λ é chamada de constante de separação. Podemos reescrever as equações como

$$T''(t) = \lambda c^2 T(t)$$
$$\phi''(x) = \lambda \phi(x)$$

- Vamos analizar a equação em x. Existe uma solução geral para todo λ?
- Note que t, x, $u(t,x) \in \mathbb{R}$ (mas não necessariamente λ). Assim, vamos usar a solução geral da equação

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

- Assim, $\phi(x) = \frac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$
- Agora, uma vez que $\phi(L) = 0$, vemos que

$$\tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

- Se $\lambda = 0$ a solução é trivial $\phi = 0$ (não consideramos).
- A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

- Assim, $\phi(x) = \frac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$
- Agora, uma vez que $\phi(L) = 0$, vemos que

$$\tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

- Se $\lambda = 0$ a solução é trivial $\phi = 0$ (não consideramos).
- A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

- Assim, $\phi(x) = \frac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$
- Agora, uma vez que $\phi(L) = 0$, vemos que

$$\tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

- Se $\lambda = 0$ a solução é trivial $\phi = 0$ (não consideramos).
- A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

- Assim, $\phi(x) = \frac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$
- Agora, uma vez que $\phi(L) = 0$, vemos que

$$\tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

- Se $\lambda = 0$ a solução é trivial $\phi = 0$ (não consideramos).
- A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

- Assim, $\phi(x) = \frac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$
- Agora, uma vez que $\phi(L) = 0$, vemos que

$$\tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

- Se $\lambda = 0$ a solução é trivial $\phi = 0$ (não consideramos).
- A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

- Assim, $\phi(x) = \frac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$
- Agora, uma vez que $\phi(L) = 0$, vemos que

$$\tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

- Se $\lambda = 0$ a solução é trivial $\phi = 0$ (não consideramos).
- A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

- Assim, $\phi(x) = \dfrac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$
- Agora, uma vez que $\phi(L) = 0$, vemos que

$$\tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

- Se $\lambda = 0$ a solução é trivial $\phi = 0$ (não consideramos).
- A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

$$\phi(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$$

- Agora, impondo as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \equiv -\frac{\tilde{B}}{2}$$

- Assim, $\phi(x) = \frac{\tilde{B}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$
- Agora, uma vez que $\phi(L) = 0$, vemos que

$$\tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

- Se $\lambda = 0$ a solução é trivial $\phi = 0$ (não consideramos).
- A condição geral para λ imposta pela condição de contorno é

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\phi(x) = \tilde{B}\,\text{senh}(\sqrt{\lambda}x)$$
$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

- Assim, temos uma infinidade (enumerável) de valores possíveis para λ

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

- Esses λ_n são chamados de valores característicos ou autovalores do problema. Isso é porque são autovalores do operador diferencial. I.e., a equação diferencial parece uma equação autovetor/autovalor:

$$D\phi = \lambda_n\phi$$

  com $D = \partial_x^2$.
- Vemos então que para cada λ_n existe uma função característica (ou autofunção.

$$\phi(x) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x)$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{ni\pi}{L} \qquad \text{onde } n = 1, 2, \ldots$$

- Assim, temos uma infinidade (enumerável) de valores possíveis para λ

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

- Esses λ_n são chamados de valores característicos ou autovalores do problema. Isso é porque são autovalores do operador diferencial. I.e., a equação diferencial parece uma equação autovetor/autovalor:

$$D\phi = \lambda_n \phi$$

com $D = \partial_x^2$.
- Vemos então que para cada λ_n existe uma função característica (ou autofunção.

Separação de variáveis: Equação da onda

$$\phi_n(x) = \tilde{B}\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda_n}x)$$
$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

- As autofunções são, então

$$\phi_n(x) = \tilde{B}_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

  onde $\tilde{B}_n$ é uma constante arbitrária (que pode ser diferente para diferentes valores de n).

- E a função $T(t)$?

Separação de variáveis: Equação da onda

- A função $T(t)$ deve agora também ser uma $T_n(t)$ que obedece

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{T_n(t)}\ddot{T}_n(t) = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\implies \ddot{T}_n(t) + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}T_n(t) = 0$$

- É a equação de oscilador harmônico com frequência natural

$$\omega_0^2 = \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}$$

- A solução geral é

$$T_n(t) = C_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

onde C_n e D_n são constantes (até agora) arbitrárias.

- Resumindo, nossa tentativa de achar a solução sob a forma

$$u(t,x) = T(t)\phi(x)$$

que satisfaça as condições de contorno nos conduziu, até agora, a um número infinito de soluções que podem ser escritas como

$$u_n(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

onde $A_n = \tilde{B}_n C_n$ e $B_n = \tilde{B}_n D_n$ são constantes arbitrárias.

- Pelo princípio da superposição vemos que a solução geral deveria ser uma combinação linear dessas soluções

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

desde que a série convirja.

- Claramente, por construção

$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

- Resumindo, nossa tentativa de achar a solução sob a forma

$$u(t,x) = T(t)\phi(x)$$

que satisfaça as condições de contorno nos conduziu, até agora, a um número infinito de soluções que podem ser escritas como

$$u_n(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

onde $A_n = \tilde{B}_n C_n$ e $B_n = \tilde{B}_n D_n$ são constantes arbitrárias.

- Pelo princípio da superposição vemos que a solução geral deveria ser uma combinação linear dessas soluções

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

desde que a série convirja.

- Claramente, por construção

$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

- Resumindo, nossa tentativa de achar a solução sob a forma

$$u(t,x) = T(t)\phi(x)$$

que satisfaça as condições de contorno nos conduziu, até agora, a um número infinito de soluções que podem ser escritas como

$$u_n(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

onde $A_n = \tilde{B}_n C_n$ e $B_n = \tilde{B}_n D_n$ são constantes arbitrárias.

- Pelo princípio da superposição vemos que a solução geral deveria ser uma combinação linear dessas soluções

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

desde que a série convirja.

- Claramente, por construção

$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

Separação de variáveis: Equação da onda

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

- Agora da condição inicial $u(0,x) = u_0(x)$ vemos que

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

- Isso determina A_n usando $u_0(x)$. (Note que é uma série de Fourier! Você se lembra como calcular as coeficientes?)
- A outra condição inicial $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ leva à

$$\partial_t u(0,x) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

e assim obtemos B_n da série de Fourier de $v_0(x)$.
- Agora nós de fato resolvemos essa EDP sujeita as condições de contorno e condições iniciais impostas.

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

- Agora da condição inicial $u(0,x) = u_0(x)$ vemos que

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

- Isso determina A_n usando $u_0(x)$. (Note que é uma série de Fourier! Você se lembra como calcular as coeficientes?)
- A outra condição inicial $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ leva à

$$\partial_t u(0,x) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

e assim obtemos B_n da série de Fourier de $v_0(x)$.

- Agora nós de fato resolvemos essa EDP sujeita as condições de contorno e condições iniciais impostas.

Separação de variáveis: Equação da onda

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

- Agora da condição inicial $u(0,x) = u_0(x)$ vemos que

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

- Isso determina A_n usando $u_0(x)$. (Note que é uma série de Fourier! Você se lembra como calcular as coeficientes?)
- A outra condição inicial $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ leva à

$$\partial_t u(0,x) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

  e assim obtemos B_n da série de Fourier de $v_0(x)$.
- Agora nós de fato resolvemos essa EDP sujeita as condições de contorno e condições iniciais impostas.