EDPs não-lineares

- Imagine que tivéssemos a equação linear (veremos isso em detalhe mais tarde)

$$\partial_t \psi + c\partial_x \psi = 0$$

- Um método muito usado para achar a solução seria dizer que

$$\psi(t, x) = e^{i\omega(k)t - ikx}$$

onde $\omega(k)$ é determinado assim: jogamos esse ansatz de volta na equação e encontramos

$$(i\omega(k) - cik)\psi = 0$$

ou

$$\omega(k) = ck$$

- Esse função $\omega(k)$ é chamada da relação de dispersão; ou seja um modo de frequência $\omega = ck$ e número de onda k é solução da equação.

EDPs não-lineares

$$
\begin{aligned}
\partial_t \psi + c\partial_x \psi &= 0 \\
\psi(t,x) &= e^{i\omega(k)t - ikx} \\
(i\omega(k) - cik)\psi &= 0 \\
\omega(k) &= ck
\end{aligned}
$$

- Note que

$$\frac{d^2}{dk^2}\omega(k) = 0$$

- Equações (não-trivial) onde $d_k^2\omega(k) \neq 0$ envolvem dispersão, que ocorre em equações não-lineares.

Equação de Korteweg-de Vries (KdV) e sólitons

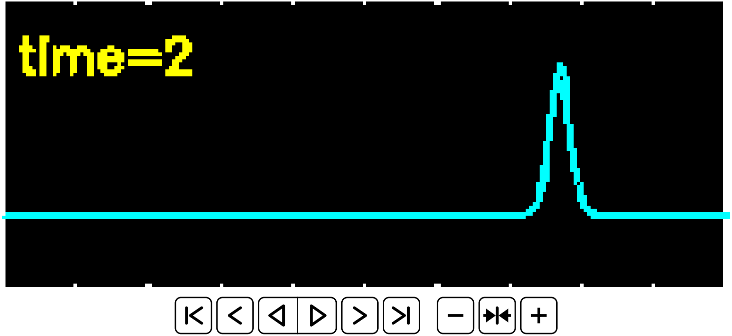
- Considere a equação

$$\underbrace{\partial_t \psi}_{\text{linear}} + \underbrace{\psi \partial_x \psi}_{\text{não-linear}} + \underbrace{\partial_x^3 \psi}_{\text{linear}} = 0$$

- É não-linear. Então, o princípio da superposição não se aplica.
- Essa equação modela a propagação de ondas em água (rasa) e outros fenômenos (e.g., "ondas solitárias").
- Ela possui soluções do tipo sóliton (ou solitão), que é uma solução da equação não linear que mantém sua forma durante a propagação.

$$\partial_t \psi + \psi \partial_x \psi + \partial_x^3 \psi = 0$$

- A solução sóliton é uma balança entre dispersão e efeitos não-lineares.

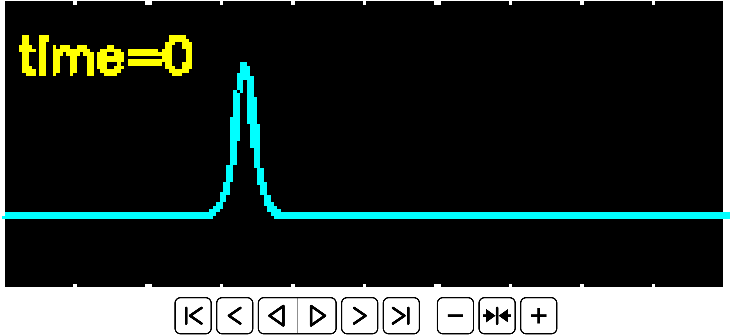


$$\partial_t \psi + \psi \partial_x \psi + \partial_x^3 \psi = 0$$

- A solução sóliton é uma balança entre dispersão e efeitos não-lineares.

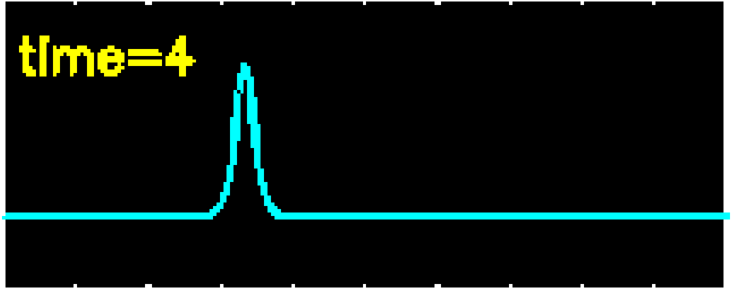
$$\partial_t\psi + \psi\partial_x\psi + \partial_x^3\psi = 0$$

- A solução sóliton é uma balança entre dispersão e efeitos não-lineares.



$$\partial_t\psi + \psi\partial_x\psi + \partial_x^3\psi = 0$$

- A solução sóliton é uma balança entre dispersão e efeitos não-lineares.



- Vamos supor que $\psi(x-ct)$ é uma solução. Então, definindo $\gamma = x - ct$ obtemos

$$\partial_t \psi(x-ct) = -c d_\gamma \psi(\gamma)$$
$$\partial_x \psi = d_\gamma \psi$$
$$\partial_x^3 \psi = d_\gamma^3 \psi$$

e assim

$$0 = \partial_t \psi + \psi \partial_x \psi + \partial_x^3 \psi = (\psi - c) d_\gamma \psi + d_\gamma^3 \psi$$

- Note que

$$d_\gamma \left(\frac{\psi^2}{2} \right) = \psi d_\gamma \psi.$$

- Então, temos

$$d_\gamma^3 \psi(\gamma) + d_\gamma \left(\frac{\psi^2}{2} \right) - c d_\gamma \psi = 0$$

Equação de Korteweg-de Vries (KdV) e sólitons

$$0 = d_\gamma^3 \psi(\gamma) + d_\gamma \left(\frac{\psi^2}{2} \right) - c d_\gamma \psi$$

- Integrando essa equação, temos

$$d_\gamma^2 \psi(\gamma) + \frac{\psi^2}{2} - c\psi = \text{constante}$$

  Vamos supor que $d_\gamma^2 \psi \to 0$ quando $\psi \to 0$, e a constante é zero.
- Agora, multiplicamos isso por $2 d_\gamma \psi$

$$\begin{aligned} 0 &= (2 d_\gamma \psi) d_\gamma^2 \psi + (d_\gamma \psi)\psi^2 - 2c d_\gamma \psi \\ \implies 0 &= d_\gamma (d_\gamma \psi)^2 + d_\gamma \left(\frac{\psi^3}{3} \right) - c d_\gamma (\psi^2) \\ &= d_\gamma \left[(d_\gamma \psi)^2 + \frac{\psi^3}{3} - c\psi^2 \right] \end{aligned}$$

- Como $d_\gamma^2 \psi \to 0$ quando $\psi \to 0$, a constante de integração é de novo

Equação de Korteweg-de Vries (KdV) e sólitons

$$0 = d_\gamma^3 \psi(\gamma) + d_\gamma \left(\frac{\psi^2}{2} \right) - c d_\gamma \psi$$

- Integrando essa equação, temos

$$d_\gamma^2 \psi(\gamma) + \frac{\psi^2}{2} - c\psi = \text{constante}$$

  Vamos supor que $d_\gamma^2 \psi \to 0$ quando $\psi \to 0$, e a constante é zero.
- Agora, multiplicamos isso por $2 d_\gamma \psi$

$$\implies 0 = d_\gamma \left[(d_\gamma \psi)^2 + \frac{\psi^3}{3} - c\psi^2 \right]$$

- Como $d_\gamma^2 \psi \to 0$ quando $\psi \to 0$, a constante de integração é de novo zero

$$(d_\gamma \psi)^2 = c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}$$

Equação de Korteweg-de Vries (KdV) e sólitons

- Como $d_\gamma^2\psi \to 0$ quando $\psi \to 0$, a constante de integração é zero

$$(d_\gamma\psi)^2 = c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}$$

- Consideramos a raiz positiva

$$\begin{aligned} d_\gamma\psi &= \sqrt{c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}} \\ \Longrightarrow \qquad \frac{d\psi}{\sqrt{c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}}} &= \quad d\gamma \end{aligned}$$

- No final, pode verificar que a solução é

$$\psi(\gamma) = \psi(x - ct) = \frac{3c}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right]}$$

- Como $d_\gamma^2\psi \to 0$ quando $\psi \to 0$, a constante de integração é zero

$$(d_\gamma\psi)^2 = c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}$$

- Consideramos a raiz positiva

$$\begin{aligned} d_\gamma\psi &= \sqrt{c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}} \\ \implies \int \frac{d\psi}{\sqrt{c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}}} &= \int d\gamma \end{aligned}$$

- No final, pode verificar que a solução é

$$\psi(\gamma) = \psi(x - ct) = \frac{3c}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right]}$$

Condições de contorno

- Numa equação diferencial ordinária de segunda ordem, nós aprendemos que é preciso saber o valor da função e sua primeira derivada num dado ponte para que a integração da equação diferencia seja possível.
- Para EDPs a coisa é mais complicada. Em geral, temos que resolver essas equações de modo que as soluções tenham um certo comportamento nas condições de contorno (que pode ser $x \to \infty$, ou um domínio fechado onde a solução tem que assumir um dado valor na fronteira.
- Por exemplo, podemos resolver a equação de Laplace supondo que $\psi(x, y) \to 0$ se $x, y \to \infty$.
- Ou, podemos resolver a equação da onda para a amplitude de uma onda eletroomagnética e impor que $\psi(t, L) = 0 = \psi(t, 0)$.

Condições de contorno

- Numa equação diferencial ordinária de segunda ordem, nós aprendemos que é preciso saber o valor da função e sua primeira derivada num dado ponte para que a integração da equação diferencia seja possível.
- Para EDPs a coisa é mais complicada. Em geral, temos que resolver essas equações de modo que as soluções tenham um certo comportamento nas condições de contorno (que pode ser $x \to \infty$, ou um domínio fechado onde a solução tem que assumir um dado valor na fronteira.
- Por exemplo, podemos resolver a equação de Laplace supondo que $\psi(x, y) \to 0$ se $x, y \to \infty$.
- Ou, podemos resolver a equação da onda para a amplitude de uma onda eletroomagnética e impor que $\psi(t, L) = 0 = \psi(t, 0)$.

Condições de contorno

- Numa equação diferencial ordinária de segunda ordem, nós aprendemos que é preciso saber o valor da função e sua primeira derivada num dado ponte para que a integração da equação diferencia seja possível.
- Para EDPs a coisa é mais complicada. Em geral, temos que resolver essas equações de modo que as soluções tenham um certo comportamento nas condições de contorno (que pode ser $x \to \infty$, ou um domínio fechado onde a solução tem que assumir um dado valor na fronteira.
- Por exemplo, podemos resolver a equação de Laplace supondo que $\psi(x, y) \to 0$ se $x, y \to \infty$.
- Ou, podemos resolver a equação da onda para a amplitude de uma onda eletroomagnética e impor que $\psi(t, L) = 0 = \psi(t, 0)$.

Condições de contorno

- Em geral, as condições de contorno mais encontrados são:
  1. Condição de Dirichlet: O valor de ψ na fronteira $\partial\Omega$ de uma região Ω limitada é dada.
  2. Condição de Neumann: É dado o valor da derivada de ψ normal à fonteira de uma região limitada
  3. Condição de Cauchy: é dado o valor de ψ e da componente da derivada de ψ normal à fronteira de uma região. Essas são mais convenientes para equações hiperbólicas.
  4. Condições intermediária (ou de Robin): o valor de uma combinação linear de ψ e sua componente da derivada normal à fronteira são especificados na fronteira.

Condições de contorno

- Em geral, as condições de contorno mais encontrados são:
  1. Condição de Dirichlet: O valor de ψ na fronteira $\partial\Omega$ de uma região Ω limitada é dada.
  2. Condição de Neumann: É dado o valor da derivada de ψ normal à fonteira de uma região limitada
  3. Condição de Cauchy: é dado o valor de ψ e da componente da derivada de ψ normal à fronteira de uma região. Essas são mais convenientes para equações hiperbólicas.
  4. Condições intermediária (ou de Robin): o valor de uma combinação linear de ψ e sua componente da derivada normal à fronteira são especificados na fronteira.

Condições de contorno

- Em geral, as condições de contorno mais encontrados são:
  1. Condição de Dirichlet: O valor de ψ na fronteira $\partial\Omega$ de uma região Ω limitada é dada.
  2. Condição de Neumann: É dado o valor da derivada de ψ normal à fonteira de uma região limitada
  3. Condição de Cauchy: é dado o valor de ψ e da componente da derivada de ψ normal à fronteira de uma região. Essas são mais convenientes para equações hiperbólicas.
  4. Condições intermediária (ou de Robin): o valor de uma combinação linear de ψ e sua componente da derivada normal à fronteira são especificados na fronteira.

Condições de contorno

- Em geral, as condições de contorno mais encontrados são:
  1. Condição de Dirichlet: O valor de ψ na fronteira $\partial\Omega$ de uma região Ω limitada é dada.
  2. Condição de Neumann: É dado o valor da derivada de ψ normal à fonteira de uma região limitada
  3. Condição de Cauchy: é dado o valor de ψ e da componente da derivada de ψ normal à fronteira de uma região. Essas são mais convenientes para equações hiperbólicas.
  4. Condições intermediária (ou de Robin): o valor de uma combinação linear de ψ e sua componente da derivada normal à fronteira são especificados na fronteira.

Condições de contorno

Condições de contorno

- O assunto envolvendo a existência e estabilidade de soluções de EDPs é muito extenso e está além do que veremos neste curso bastante introdutório.
- Por exemplo, a equação de Poisson numa região fechada
  - com condições de Dirichlet levam a uma solução única e estável
  - com condições de Neumann também levam a uma solução estável e única

  Assim, condições de Cauchy (basicamente Dirichlet + Neumann) podem levar a uma inconsistência.
- Aqui não iremos nos preocupar muito com existência e estabilidade. Veremos a seguir como resolver algumas das equações diferenciais que aparecem na física através de alguns métodos.
- Uma completa discussão sobre EDPs pode ser encontrada no livro de Morse e Feshbach ou no clássico livro de Courant e Hilbert (volume II).

Condições de contorno

- O assunto envolvendo a existência e estabilidade de soluções de EDPs é muito extenso e está além do que veremos neste curso bastante introdutório.
- Por exemplo, a equação de Poisson numa região fechada
  - com condições de Dirichlet levam a uma solução única e estável
  - com condições de Neumann também levam a uma solução estável e única

  Assim, condições de Cauchy (basicamente Dirichlet + Neumann) podem levar a uma inconsistência.
- Aqui não iremos nos preocupar muito com existência e estabilidade. Veremos a seguir como resolver algumas das equações diferenciais que aparecem na física através de alguns métodos.
- Uma completa discussão sobre EDPs pode ser encontrada no livro de Morse e Feshbach ou no clássico livro de Courant e Hilbert (volume II).

Condições de contorno

- O assunto envolvendo a existência e estabilidade de soluções de EDPs é muito extenso e está além do que veremos neste curso bastante introdutório.
- Por exemplo, a equação de Poisson numa região fechada
    - com condições de Dirichlet levam a uma solução única e estável
    - com condições de Neumann também levam a uma solução estável e única

  Assim, condições de Cauchy (basicamente Dirichlet + Neumann) podem levar a uma inconsistência.
- Aqui não iremos nos preocupar muito com existência e estabilidade. Veremos a seguir como resolver algumas das equações diferenciais que aparecem na física através de alguns métodos.
- Uma completa discussão sobre EDPs pode ser encontrada no livro de Morse e Feshbach ou no clássico livro de Courant e Hilbert (volume II).

- O assunto envolvendo a existência e estabilidade de soluções de EDPs é muito extenso e está além do que veremos neste curso bastante introdutório.
- Por exemplo, a equação de Poisson numa região fechada
  - com condições de Dirichlet levam a uma solução única e estável
  - com condições de Neumann também levam a uma solução estável e única

  Assim, condições de Cauchy (basicamente Dirichlet + Neumann) podem levar a uma inconsistência.
- Aqui não iremos nos preocupar muito com existência e estabilidade. Veremos a seguir como resolver algumas das equações diferenciais que aparecem na física através de alguns métodos.
- Uma completa discussão sobre EDPs pode ser encontrada no livro de Morse e Feshbach ou no clássico livro de Courant e Hilbert (volume II).