Introdução às Equações Diferenciais Parciais

- A ação de tomar derivadas (tanto ordinárias como parciais) é uma operação linear:

$$\frac{d}{dx}\left[a\phi(x) + b\psi(x))\right] = a\frac{d\phi}{dx} + b\frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a\phi(x,y) + b\psi(x,y))\right] = a\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) + b\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y)$$

- Em geral, equações diferenciais ordinárias ou parciais podem ser escritos em termos de um operador linear D.

$$D\psi = f$$

onde f é uma função conhecida e ψ é o que você quer encontrar. (Se $f = 0$ a equação é "homogênea".)

- Quando D é linear, o princípio da superposição é valido. I.e., a soma de duas soluções também é solução.
- Em geral, só veremos E.D. com no máximo 2 derivadas já que esse é o caso que mais ocorre em física (Leis de Newton, Electromagnetismo, Relatividade Geral, Eq. de Schrodinger, ...)

- A ação de tomar derivadas (tanto ordinárias como parciais) é uma operação linear:

$$\frac{d}{dx}\left[a\phi(x) + b\psi(x)\right] = a\frac{d\phi}{dx} + b\frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a\phi(x,y) + b\psi(x,y)\right] = a\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) + b\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y)$$

- Em geral, equações diferenciais ordinárias ou parciais podem ser escritos em termos de um operador linear D.

$$D\psi = f$$

onde f é uma função conhecida e ψ é o que você quer encontrar. (Se $f = 0$ a equação é "homogênea".)

- Quando D é linear, o princípio da superposição é valido. I.e., a soma de duas soluções também é solução.
- Em geral, só veremos E.D. com no máximo 2 derivadas já que esse é o caso que mais ocorre em física (Leis de Newton, Electromagnetismo, Relatividade Geral, Eq. de Schrodinger, ...)

Introdução às Equações Diferenciais Parciais

- A ação de tomar derivadas (tanto ordinárias como parciais) é uma operação linear:

$$\frac{d}{dx}\left[a\phi(x) + b\psi(x))\right] = a\frac{d\phi}{dx} + b\frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a\phi(x,y) + b\psi(x,y))\right] = a\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) + b\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y)$$

- Em geral, equações diferenciais ordinárias ou parciais podem ser escritos em termos de um operador linear D.

$$D\psi = f$$

  onde f é uma função conhecida e ψ é o que você quer encontrar. (Se $f = 0$ a equação é "homogênea".)
- Quando D é linear, o princípio da superposição é valido. I.e., a soma de duas soluções também é solução.
- Em geral, só veremos E.D. com no máximo 2 derivadas já que esse é o caso que mais ocorre em física (Leis de Newton, Electromagnetismo, Relatividade Geral, Eq. de Schrodinger, ...)

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}) = 0$$

  Isso aparece em eletrostática, magnetostática, hidrodinâmica, difusão de calor (independente do tempo), gravitação

- Equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

  Basicamente, essa é a equação de Laplace com uma fonte ρ (i.e., agente externo).

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz

$$\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$$

  Isso aparece no estudo de: membranas, cordas, som, ondas eletromagnéticas, reatores nucleares
- Equação da difusão

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$$

- Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$$

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz

$$\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$$

  Isso aparece no estudo de: membranas, cordas, som, ondas eletromagnéticas, reatores nucleares
- Equação da difusão

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$$

- Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$$

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz

$$\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$$

  Isso aparece no estudo de: membranas, cordas, som, ondas eletromagnéticas, reatores nucleares

- Equação da difusão

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$$

- Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$$

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz

$$\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$$

  Isso aparece no estudo de: membranas, cordas, som, ondas eletromagnéticas, reatores nucleares

- Equação da difusão

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$$

- Equação da onda

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$$

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz $\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação da difusão $\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$
- Equação da onda $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$
- Equação de Klein-Gordon $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0, \ (\mu \in \mathbb{R})$
- Equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t,\vec{x}) + V(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})$$

(É como a equação de difusão com coeficientes complexos)

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz $\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação da difusão $\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$
- Equação da onda $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$
- Equação de Klein-Gordon $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0, \ (\mu \in \mathbb{R})$
- Equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t,\vec{x}) + V(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})$$

(É como a equação de difusão com coeficientes complexos)

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz $\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação da difusão $\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$
- Equação da onda $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$
- Equação de Klein-Gordon $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0, \ (\mu \in \mathbb{R})$
- Equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t,\vec{x}) + V(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})$$

(É como a equação de difusão com coeficientes complexos)

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz $\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação da difusão $\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$
- Equação da onda $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$
- Equação de Klein-Gordon $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0, \ (\mu \in \mathbb{R})$
- Eq. de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t,\vec{x}) + V(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})$
- Equação de Dirac

$$0 = (i\partial\!\!\!/ - m)\psi(t,\vec{x}) = i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi$$

com $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ matrizes de Pauli. Nesse curso não veremos essa equação.

Exemplos de Equações Diferenciais

Exemplos de equações diferenciais parciais (EDP):

- Equação de Laplace $\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação de Poisson $\nabla^2\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$
- Equação de Helmholtz $\nabla^2\psi(\vec{x}) \pm k^2\psi(\vec{x}) = 0$
- Equação da difusão $\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) - a^2\nabla^2\psi(t,\vec{x}) = 0, \qquad (a > 0)$
- Equação da onda $\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0$
- Equação de Klein-Gordon $\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2\right)\psi(t,\vec{x}) = 0, \ (\mu \in \mathbb{R})$
- Eq. de Schrödinger $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = \dfrac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t,\vec{x}) + V(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})$
- Equação de Dirac

$$0 = (i\partial\!\!\!/ - m)\psi(t,\vec{x}) = i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi$$

com $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ matrizes de Pauli. Nesse curso não veremos essa equação.

Métodos para encontrara soluções

Métodos para encontrar soluções de equações diferenciais parciais:

1. Separação de variáveis. (Veremos em detalhe aqui no curso).
2. Conversão da equação em uma equação integral usando funções de Green. (Muito usado para EDP's não-homogêneo como o caso da Equação de Poisson.)
3. Outros métodos analíticos. E.g., desenvolvimento em séries de Fourier, transformadas de Fourier e Laplace, ou série de potências
4. Métodos numéricos. De fato, esse método é o mais comum, pois é raro encontrar sistemas com solução analítica. Porém, não veremos nada disso nesse curso.

Classes de EDPs

- A equação diferencial parcial linear de segunda ordem mais geral que podemos formar (com somente 2 variáveis, por simplicidade) é

$$\left[A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E\frac{\partial}{\partial x} + 2F\frac{\partial}{\partial y}\right]\psi(x,y) = 0$$

- Esse operador pode tomar três formas diferentes dependendo de

$$B^2 - AC \begin{cases} > 0 \rightarrow & \text{EDP hiperbólica} \\ = 0 \rightarrow & \text{EDP parabólica} \\ < 0 \rightarrow & \text{EDP elíptica} \end{cases}$$

- A classificação é análoga a de uma cônica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ex + 2Fy + G = 0$$

onde $B^2 - AC$ (o discriminante) determina se temos hipérboles, elipses, ou parábolas.

Classes de EDPs

- A equação diferencial parcial linear de segunda ordem mais geral que podemos formar (com somente 2 variáveis, por simplicidade) é

$$\left[A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E\frac{\partial}{\partial x} + 2F\frac{\partial}{\partial y}\right]\psi(x, y) = 0$$

- Esse operador pode tomar três formas diferentes dependendo de

$$B^2 - AC \begin{cases} > 0 \rightarrow & \text{EDP hiperbólica} \\ = 0 \rightarrow & \text{EDP parabólica} \\ < 0 \rightarrow & \text{EDP elíptica} \end{cases}$$

- A classificação é análoga a de uma cônica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ex + 2Fy + G = 0$$

onde $B^2 - AC$ (o discriminante) determina se temos hipérboles, elipses, ou parábolas.

Classificação de EDPs: exemplos

$$\left[A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E\frac{\partial}{\partial x} + 2F\frac{\partial}{\partial y}\right]\psi(x,y) = 0$$

- Equação de onda num dimensão $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0$ com $c^2 > 0$. Neste caso $B = 0$ e $AC < 0$. Então $B^2 - AC > 0$ e a equação é hiperbólica.
- Equação da difusão $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = 0$ Aqui $B = 0$ e $AC = 0$ (ou $A = 0$ ou $C = 0$). Então, a equação é parablólica.
- Equação de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0$$

Agora $B = 0$ e $A = C$. Então, é elíptica.

Classificação de EDPs: exemplos

$$\left[A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E\frac{\partial}{\partial x} + 2F\frac{\partial}{\partial y}\right]\psi(x,y) = 0$$

- Equação de onda num dimensão $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0$ com $c^2 > 0$. Neste caso $B = 0$ e $AC < 0$. Então $B^2 - AC > 0$ e a equação é hiperbólica.
- Equação da difusão $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = 0$
  Aqui $B = 0$ e $AC = 0$ (ou $A = 0$ ou $C = 0$). Então, a equação é parablólica.
- Equação de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0$$

Agora $B = 0$ e $A = C$. Então, é elíptica.

Classificação de EDPs: exemplos

$$\left[A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E\frac{\partial}{\partial x} + 2F\frac{\partial}{\partial y}\right]\psi(x,y) = 0$$

- Equação de onda num dimensão $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0$ com $c^2 > 0$. Neste caso $B = 0$ e $AC < 0$. Então $B^2 - AC > 0$ e a equação é hiperbólica.
- Equação da difusão $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = 0$
  Aqui $B = 0$ e $AC = 0$ (ou $A = 0$ ou $C = 0$). Então, a equação é parablólica.
- Equação de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0$$

Agora $B = 0$ e $A = C$. Então, é elíptica.

Classificação de EDPs: mais de 2 variáveis

- A mesma terminologia se aplica no caso de funções de mais de 2 variáveis. Se a equação tem derivadas de segunda ordem da forma:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

a classificação da equação depende das autovalores da matriz $a_{i,j}$.

- (Se qualquer autovalor é zero $\implies$ parabólica; se todos os autovalores tem o mesmo sinal $\implies$ ellíptica; se todos tem o mesmo sinal exceto um $\implies$ hiperbôlica, etc.)
- Assim, a equação da onda é sempre hiperbôlica, a da difusão sempre é parabólica, e a de Laplace sempre é elíptica em qualquer número de dimensões.
- Se os coeficientes A, B, C, D, E, F, G não são constantes e podem variar com as coordenadas, uma dada equação pode estar numa dada classe e mudar para outra quando os parâmetros variam.

Classificação de EDPs: mais de 2 variáveis

- A mesma terminologia se aplica no caso de funções de mais de 2 variáveis. Se a equação tem derivadas de segunda ordem da forma:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

a classificação da equação depende das autovalores da matriz $a_{i,j}$.

- (Se qualquer autovalor é zero $\implies$ parabólica; se todos os autovalores tem o mesmo sinal $\implies$ ellíptica; se todos tem o mesmo sinal exceto um $\implies$ hiperbólica, etc.)
- Assim, a equação da onda é sempre hiperbólica, a da difusão sempre é parabólica, e a de Laplace sempre é elíptica em qualquer número de dimensões.
- Se os coeficientes A, B, C, D, E, F, G não são constantes e podem variar com as coordenadas, uma dada equação pode estar numa dada classe e mudar para outra quando os parâmetros variam.

Classificação de EDPs: mais de 2 variáveis

- A mesma terminologia se aplica no caso de funções de mais de 2 variáveis. Se a equação tem derivadas de segunda ordem da forma:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

  a classificação da equação depende das autovalores da matriz $a_{i,j}$.
- (Se qualquer autovalor é zero $\implies$ parabólica; se todos os autovalores tem o mesmo sinal $\implies$ ellíptica; se todos tem o mesmo sinal exceto um $\implies$ hiperbôlica, etc.)
- Assim, a equação da onda é sempre hiperbôlica, a da difusão sempre é parabólica, e a de Laplace sempre é elíptica em qualquer número de dimensões.
- Se os coeficientes A, B, C, D, E, F, G não são constantes e podem variar com as coordenadas, uma dada equação pode estar numa dada classe e mudar para outra quando os parâmetros variam.

Exemplo: Equação da onda em 1+1 dimensões

- Exemplo: Equação da onda em 1+1 dimensões (1+1D = 1 espaço e 1 tempo)

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0$$

- Essa equação é hiperbólica. Assim, deve existir um sistema de coordenadas γ, η onde $A = C = 0$ e $B^2 > 0$ e a EDP fica

$$\frac{\partial^2}{\partial\gamma\partial\eta}\psi(\gamma,\eta) = 0.$$

- Note que

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Exemplo: Equação da onda em 1+1 dimensões

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(t,x) = 0$$

- Vamos definir $\gamma = ct + x$, $\eta = ct - x$
- Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = c\left(\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \eta} = 2\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta} = 2\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0 = \frac{\partial}{\partial \gamma}\frac{\partial}{\partial \eta}\psi(\gamma,\eta)$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(t,x) = 0$$

- Vamos definir $\gamma = ct + x$, $\eta = ct - x$
- Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = c\left(\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \eta} = 2\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta} = 2\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0 = \frac{\partial}{\partial \gamma}\frac{\partial}{\partial \eta}\psi(\gamma,\eta)$$

Exemplo: Equação da onda em 1+1 dimensões

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(t,x)=0$$

- Vamos definir $\gamma = ct + x$, $\eta = ct - x$
- Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial\gamma}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta} = c\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{\partial}{\partial\eta}\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{\partial}{\partial\eta} = 2\frac{\partial}{\partial\gamma}\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{\partial}{\partial\eta} = 2\frac{\partial}{\partial\eta}\\
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = 0 &= \frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{\partial}{\partial\eta}\psi(\gamma,\eta)
\end{aligned}$$

Exemplo: Equação da onda em 1+1 dimensões

$$\frac{\partial}{\partial \gamma}\frac{\partial}{\partial \eta}\psi(\gamma,\eta) = 0$$

- A solução mais geral então é (devido ao princípio da superposição)

$$\psi(\gamma,\eta) = f_1(\gamma) + f_2(\eta)$$

- De fato,

$$\partial_\gamma \partial_\eta \left[f_1(\gamma) + f_2(\eta)\right] = \partial_\gamma \partial \eta f_1(\gamma) + \partial \gamma \partial \eta f_2(\eta) = 0 + 0$$

onde $\partial_\gamma = \frac{\partial}{\partial \gamma}$, etc., e

$$f_1(\gamma) = f_1(x + ct)$$
$$f_2(\eta) = f_2(x - ct)$$

são funções arbitrários $\in \mathbb{C}$.

Exemplo: Equação de Laplace em $0 + 2$ dimensões.

- Exemplo: Para o caso elíptico, vejamos a equação de Laplace em $0 + 2$ dimensões.

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(x, y)$$

- Defina $\gamma = x + iy$ e $\eta = \gamma^* = x - iy$:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = i \frac{\partial}{\partial \gamma} - i \frac{\partial}{\partial \eta}$$

- Então,

$$\partial_x + i\partial_y = 2\partial_\eta$$
$$\partial_x - i\partial_y = 2\partial_\gamma$$
$$\implies (\partial_x^2 + \partial_y^2)\psi(x, y) = 0 = \partial_\eta \partial_\gamma \psi(\gamma, \eta)$$

Exemplo: Equação de Laplace em $0+2$ dimensões.

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)\psi(x,y) = 0 = \partial_\eta \partial_\gamma \psi(\gamma,\eta)$$
$$\gamma = x + iy \text{ e } \eta = \gamma^* = x - iy$$

- Novamente, vemos então que a solução mais geral é

$$\psi(x,y) = f_1(x-iy) + f_2(x+iy)$$

onde

$$(\partial_x - i\partial_y)f_1(x-iy) = f_1' - f_1' = 0$$
$$(\partial_x + i\partial_y)f_2(x+iy) = f_2' - f_2' = 0$$

- Como $f_1(x-iy)$ e $f_2(x+iy)$ são soluções da equação de Laplace em duas dimensões, elas são chamadas de funções harmônicas.