Transformada de Laplace

- Já vimos a transformada de Fourier. Também existem outros tipos de transformadas. Um outro exemplo é a Transformada de Laplace

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a dt\ F(t)e^{-st} = \int_0^\infty dt\ F(t)e^{-st}$$

- Note que neste caso, o integral $\int_0^\infty dt\ F(t)$ não precisa existir!
- Por exemplo, $F(t)$ pode divergir exponencialmente quando $t\to\infty$. Entretanto, se existem constante $s_0 > 0$ e $M > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-s_0 t}F(t)\right| \le M,$$

a transformada de Laplace existe para $s > s_0$.
- Nesse caso, $F(t)$ é de "ordem exponencial".
- Como contra-exemplo, $F(t) = e^{t^2}$ não possui transformada de Laplace.

Transformada de Laplace

- Já vimos a transformada de Fourier. Também existem outros tipos de transformadas. Um outro exemplo é a Transformada de Laplace

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a dt\ F(t)e^{-st} = \int_0^\infty dt\ F(t)e^{-st}$$

- Note que neste caso, o integral $\int_0^\infty dt\ F(t)$ não precisa existir!
- Por exemplo, $F(t)$ pode divergir exponencialmente quando $t \to \infty$. Entretanto, se existem constante $s_0 > 0$ e $M > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \left| e^{-s_0 t} F(t) \right| \leq M,$$

a transformada de Laplace existe para $s > s_0$.
- Nesse caso, $F(t)$ é de "ordem exponencial".
- Como contra-exemplo, $F(t) = e^{t^2}$ não possui transformada de Laplace.

Transformada de Laplace

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty dt\ F(t)e^{-st}$$

- A transformada de Laplace pode também não existir se existe uma singularidade suficientemente forte em $F(t)$ quando $t \to 0$, ou seja, por exemplo

$$\int_0^\infty dt\ t^n e^{-st}$$

diverge em $t \to 0$ para $n \leq -1$. A transformada de Laplace não existe se $n \leq -1$.

- A transformada de Laplace é uma operação linear:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

(prove isso)

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty dt\ F(t) e^{-st}$$

- Exemplos:

$$F(t) = 1 \implies \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty dt e^{-st} = \frac{1}{s}$$

$$F(t) = e^{\kappa t} \implies \mathcal{L}\{e^{\kappa t}\} = \int_0^\infty dt e^{-st} e^{\kappa t} = \frac{1}{s-\kappa}$$

A ultima existe se $s > \kappa$.

Exemplos da Transformada de Laplace

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty dt \; F(t) e^{-st}$$

- Exemplos:

$$F(t) = 1 \implies \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty dt e^{-st} = \frac{1}{s}$$

$$F(t) = e^{\kappa t} \implies \mathcal{L}\{e^{\kappa t}\} = \int_0^\infty dt e^{-st} e^{\kappa t} = \frac{1}{s - \kappa}$$

A ultima existe se $s > \kappa$.

Exemplos da Transformada de Laplace

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty dt\ F(t)e^{-st}$$

- Outro exemplo:

$$\begin{aligned} F(t) &= \cosh(kt) \\ \implies \mathcal{L} &= \int_0^\infty dt e^{-st}\cosh(kt) = \int_0^\infty dt \frac{e^{-st}}{2}\left[e^{kt} + e^{-kt}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right] = \frac{s}{s^2-k^2} \qquad \text{se } s > k \end{aligned}$$

- *Mostre que

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}, \qquad s > 0$$

Exemplos da Transformada de Laplace

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty dt\ F(t)e^{-st}$$

- Outro exemplo:

$$F(t) = t^n$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty dt e^{-st} t^n$$

Mudando variáveis: $st = u$, $dt = du/s$:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty du e^{-u} u^n$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

se $s > 0$ e $n > -1$.

Inverso da Transformada de Laplace

- Dada a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ queremos saber se existe a transformada inversa, $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$
- Para os fins desse curso, quando $\mathcal{L}$ existir $\mathcal{L}^{-1}$ existirá e será única. Em geral, essa transformada inversa não é única. Isto é, se

$$\mathcal{L}\{F_1\} = f(s) = \mathcal{L}\{F_2\},$$

  em geral, não é o caso que $F_1(t) = F_2(t)$.
- Porem, é verdade que

$$\int_0^a dt\,[F_1(t) - F_2(t)] = 0, \qquad \forall a > 0$$

  (Teorema de Lerch).
- Não iremos nos preocupar com esta possibilidade no curso.

Inverso da Transformada de Laplace

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty dt\ F(t)e^{-st}$$

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s) ds$$

- Em geral, calculando o inverso pode ser complicado. Por exemplo, uma expressão formal do inverso envolve integração no plano complexo e o teorema dos resíduos (que é além do escopo deste curso).
- Em muitos casos, podemos encontrar a inversa a partir de resultados já conhecidos, $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$, etc. Se conseguirmos escrever uma função como uma soma de funções conhecidas, a transformada é a soma das transformadas

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Expansão em frações parciais

- Considere a transformada de Laplace $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$.
  Qual função $F(t)$ tem essa transformada de Laplace?
- Expande assim $\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{c}{s} + \dfrac{as+b}{s^2+k^2}$.
- Temos que determinar a, b, c. Tomando o denominador comum

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}$$

$$k^2 = (a+c)s^2 + bs + ck^2$$

$$\implies a+c=0, b=0, c=1 \implies a=-1$$

- E assim $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+k^2}$
- A função $F(t) = 1-\cos(kt)$ tem essa transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{1-\cos kt\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2} = f(s)$$

Expansão em frações parciais

- Considere a transformada de Laplace $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$.

  Qual função $F(t)$ tem essa transformada de Laplace?
- Expande assim $\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{c}{s} + \dfrac{as+b}{s^2+k^2}$.
- Temos que determinar a, b, c. Tomando o denominador comum

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}$$

$$k^2 = (a+c)s^2 + bs + ck^2$$

$$\implies a+c=0, b=0, c=1 \implies a=-1$$

- E assim $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+k^2}$
- A função $F(t) = 1 - \cos(kt)$ tem essa transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{1-\cos kt\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2} = f(s)$$

Expansão em frações parciais

- Considere a transformada de Laplace $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$.
  Qual função $F(t)$ tem essa transformada de Laplace?
- Expande assim $\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{c}{s} + \dfrac{as+b}{s^2+k^2}$.
- Temos que determinar a, b, c. Tomando o denominador comum

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}$$
$$k^2 = (a+c)s^2 + bs + ck^2$$
$$\implies a+c=0, b=0, c=1 \implies a=-1$$

- E assim $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+k^2}$
- A função $F(t) = 1-\cos(kt)$ tem essa transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{1-\cos kt\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2} = f(s)$$

Expansão em frações parciais

- Considere a transformada de Laplace $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$.
  Qual função $F(t)$ tem essa transformada de Laplace?
- Expande assim $\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{c}{s} + \dfrac{as+b}{s^2+k^2}$.
- Temos que determinar a, b, c. Tomando o denominador comum

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}$$

$$k^2 = (a+c)s^2 + bs + ck^2$$

$$\implies a+c=0, b=0, c=1 \implies a=-1$$

- E assim $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+k^2}$
- A função $F(t) = 1-\cos(kt)$ tem essa transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{1-\cos kt\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2} = f(s)$$

Expansão em frações parciais

- Considere a transformada de Laplace $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$.

  Qual função $F(t)$ tem essa transformada de Laplace?
- Expande assim $\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{c}{s} + \dfrac{as+b}{s^2+k^2}$.
- Temos que determinar a, b, c. Tomando o denominador comum

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}$$

$$k^2 = (a+c)s^2 + bs + ck^2$$

$$\implies a+c=0, b=0, c=1 \implies a=-1$$

- E assim $f(s) = \dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+k^2}$
- A função $F(t) = 1 - \cos(kt)$ tem essa transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{1-\cos kt\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2} = f(s)$$

Transformada de Laplace e derivadas

- Considere a transformada de Laplace de

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dF}{dt}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{d}{dt}F(t)$$

- Integrando por partes,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dF}{dt}\right\} = e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty dtF(t)\frac{d}{dt}e^{-st}$$

$$= -\lim_{t\to 0^+} F(t) + s\int_0^\infty dtF(t)e^{-st} = sf(s) - F(0^+)$$

(dF/dt) é, por hipótese, pelo menos contínua por pedaços em $0 \leq t < \infty$.)

- Analogamente,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nF}{dt^n}\right\} = s^n\mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}F'(0^+) - \ldots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}F(0^+)$$

(Prove isso.)

Transformada de Laplace e derivadas

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n F}{dt^n}\right\} = s^n \mathcal{L}\left\{F(t)\right\} - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}F'(0^+) - \ldots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}F(0^+)$$

- Vemos que, tal qual aconteceu com a transformada de Fourier, a transformada de Laplace converterá equações diferenciais em t em equações algébricas em s.

Transformada de Laplace e derivadas

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nF}{dt^n}\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}F'(0^+) - \ldots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}F(0^+)$$

- Exemplo: $\mathcal{L}\{\text{sen}\, kt\}$.
- Uma vez que $\quad \dfrac{d^2}{dt^2}\,\text{sen}\, kt = -k^2\,\text{sen}\, kt, \quad$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\,\text{sen}\, kt\right\} &= \mathcal{L}\left\{-k^2\,\text{sen}\, kt\right\} = -k^2\mathcal{L}\left\{\text{sen}\, kt\right\} \\
&= s^2\mathcal{L}\{\text{sen}\, kt\} - s \cancelto{0}{\lim_{t\to 0^+} \text{sen}\, kt} - \left.\frac{d}{dt}\,\text{sen}\, kt\right|_{t\to 0^+} \\
&= s^2\mathcal{L}\{\text{sen}\, kt\} - k = -k^2\mathcal{L}\left\{\text{sen}\, kt\right\}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}\{\text{sen}\, kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$

Transformada de Laplace e derivadas

- Exemplo: Oscilador harmônico $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
  com condições iniciais $x(0^+) = x_0, \quad \dot{x}(0^+) = 0$
- Aplicamos a transformada na equações inteira

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} + \omega_0^2 \mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = 0$$

- Denotamos $\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} \equiv \tilde{x}(s)$, e assim

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = s^2\tilde{x}(s) - s\lim_{t\to 0^+} x(t) - \cancelto{0}{\dot{x}(0^+)} = s^2\tilde{x}(s) - sx_0.$$

- Então a equação fica

$$s^2\tilde{x}(s) - sx_0 + \omega_0^2\tilde{x}(s) = 0$$

$$\implies \tilde{x}(s) = x_0\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Transformada de Laplace e derivadas

- Exemplo: Oscilador harmônico $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
  com condições iniciais $x(0^+) = x_0, \quad \dot{x}(0^+) = 0$
- Aplicamos a transformada na equações inteira

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} + \omega_0^2 \mathcal{L}\{x(t)\} = 0$$

- Denotamos $\mathcal{L}\{x(t)\} \equiv \tilde{x}(s)$, e assim

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = s^2\tilde{x}(s) - s\lim_{t\to 0^+} x(t) - \cancelto{0}{\dot{x}(0^+)} = s^2\tilde{x}(s) - sx_0.$$

- Então a equação fica

$$s^2\tilde{x}(s) - sx_0 + \omega_0^2\tilde{x}(s) = 0$$

$$\implies \tilde{x}(s) = x_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

Transformada de Laplace e derivadas

- Exemplo: Oscilador harmônico $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
  com condições iniciais $x(0^+) = x_0, \quad \dot{x}(0^+) = 0$
- Aplicamos a transformada na equações inteira

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} + \omega_0^2 \mathcal{L}\{x(t)\} = 0$$

- Denotamos $\mathcal{L}\{x(t)\} \equiv \tilde{x}(s)$, e assim

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = s^2\tilde{x}(s) - s\lim_{t\to 0^+} x(t) - \cancelto{0}{\dot{x}(0^+)} = s^2\tilde{x}(s) - sx_0.$$

- Então a equação fica

$$s^2\tilde{x}(s) - sx_0 + \omega_0^2\tilde{x}(s) = 0$$

$$\implies \tilde{x}(s) = x_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Transformada de Laplace e derivadas

- Exemplo: Oscilador harmônico $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
  com condições iniciais $x(0^+) = x_0, \quad \dot{x}(0^+) = 0$
- Aplicamos a transformada na equações inteira

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} + \omega_0^2 \mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = 0$$

- Denotamos $\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} \equiv \tilde{x}(s)$, e assim

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = s^2\tilde{x}(s) - s\lim_{t\to 0^+} x(t) - \cancelto{0}{\dot{x}(0^+)} = s^2\tilde{x}(s) - sx_0.$$

- Então a equação fica

$$s^2\tilde{x}(s) - sx_0 + \omega_0^2\tilde{x}(s) = 0$$

$$\implies \tilde{x}(s) = x_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Transformada de Laplace e derivadas

- Exemplo: Oscilador harmônico $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
  com condições iniciais $x(0^+) = x_0, \quad \dot{x}(0^+) = 0$
- Então a equação fica

$$s^2\tilde{x}(s) - sx_0 + \omega_0^2\tilde{x}(s) = 0$$
$$\implies \tilde{x}(s) = x_0\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

- mas vimos que

$$\mathcal{L}\left\{\cos(\omega_0 t)\right\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

e assim vemos que

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{x}(s)\} = x_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\right\}$$
$$= x_0\cos(\omega_0 t)$$

como já era esperado.

Transformada de Laplace da delta de Dirac

- Com $t_0 > 0$, a transformada de $\delta(t - t_0)$ é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\delta(t - t_0) \\ &= e^{-st_0}\end{aligned}$$

e se $t_0 \to 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

(Aqui está subentendido que estamos trabalhando com o limite $n \to \infty$ de uma sequência delta.)

Transformada de Laplace da delta de Dirac

- Exemplo: Força de curtíssima duração:
  Imagine uma partícula de massa m sujeito a uma força de curtíssima duração, que iremos usar a aproximação em que

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = P\delta(t)$$

  com P constante.
- Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$ms^2\tilde{x}(s) - msx(0^+) - m\dot{x}(0^+) = P.$$

- Supomos agora que $\quad \dot{x}(0^+) = x(0^+) = 0.$
- Assim, $\quad \tilde{x}(s) = \dfrac{p}{ms^2}$

$$\implies \quad x(t) = \frac{p}{m}t$$

$$\dot{x}(t) = \frac{p}{m}$$