Função de Green (2)

- Resumo: equação diferencial linear ordinária de segunda ordem

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = D_t[y(t)] = f(t)$$
$$D_t = \frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t)$$

- Função de Green: $D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$
- Solução geral: $y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{parte homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t')f(t')$

Construção da Função de Green

- Podemos obter a função de Green $G(t,t')$ a partir das soluções da parte homogênea. De fato, da definição de $G(t,t')$

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t,t')$$

vemos que para $t \neq t'$,

$$D_t[G(t,t' \neq t)] = 0$$

ou seja, nesse caso $G(t,t')$ é solução da equação homogênea em t.
- Vamos separar o domínio em 2 regiões: $t > t'$ e $t < t'$.

$$G(t,t') = \begin{cases} C_1 y_1(t), & \text{t < t'} \\ C_2 y_2(t), & \text{t > t'} \end{cases} = C_1 y_1(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2(t)\theta(t-t').$$

Sabemos que y_1 e y_2 devem ser soluções da equação homogênea.
- Podemos escolher C_1 e C_2 tal que

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t,t').$$

Construção da Função de Green

$$G(t,t') = C_1 y_1(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2(t)\theta(t-t').$$

$$D_t[G(t,t')] = \left[\frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t)\right] G(t,t') = \delta(t,t').$$

- Assim, para calcular o lado esquerdo precisamos

$$\frac{d}{dt}G(t,t') = C_1 y_1'(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2'(t)\theta(t-t') + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\Big|_{t\to t'} \delta(t-t')$$

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') = C_1 y_1''(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2''(t)\theta(t-t') + \left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right]\delta(t-t') + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\Big|_{t\to t'} \frac{d}{dt}\delta(t-t')$$

$$
\begin{aligned}
D_t[G(t,t')] &= \left[\frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t)\right] G(t,t') \\
&= C_1 y_1''(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2''(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right]\delta(t-t') + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t') \\
&\quad + P(t)\Big[C_1 y_1'(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2'(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\delta(t-t')\Big] \\
&\quad + C_1 Q(t) y_1(t)\theta(t'-t) + C_2 Q(t) y_2(t)\theta(t-t') \\
&= \theta(t'-t)C_1\left[\cancel{y_1''(t) + P(t)y_1'(t) + Q(t)y_1(t)}\right] \\
&\quad + \theta(t-t')C_2\left[\cancel{y_2''(t) + P(t)y_2'(t) + Q(t)y_2(t)}\right] \\
&\quad + \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]
\end{aligned}
$$

Construção da Função de Green

$$
\begin{aligned}
D_t[G(t,t')] &= \left[\frac{d^2}{dt^2} + \color{red}{P(t)\frac{d}{dt}} + Q(t)\right] G(t,t') \\
&= C_1 y_1''(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2''(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right]\delta(t-t') + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t') \\
&\quad + P(t)\Big[C_1 y_1'(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2'(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\delta(t-t')\Big] \\
&\quad + C_1 Q(t) y_1(t)\theta(t'-t) + C_2 Q(t) y_2(t)\theta(t-t') \\
&= \theta(t'-t)C_1\cancel{\left[y_1''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y_1(t)\right]} \\
&\quad + \theta(t-t')C_2\cancel{\left[y_2''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y_2(t)\right]} \\
&\quad + \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_t[G(t,t')] &= \left[\frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t)\right] G(t,t') \\
&= C_1 y_1''(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2''(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right]\delta(t-t') + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t') \\
&\quad + P(t)\Bigg[C_1 y_1'(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2'(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\delta(t-t')\Bigg] \\
&\quad + C_1 Q(t) y_1(t)\theta(t'-t) + C_2 Q(t) y_2(t)\theta(t-t') \\
&= \theta(t'-t)C_1\cancel{\left[y_1''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y_1(t)\right]} \\
&\quad + \theta(t-t')C_2\cancel{\left[y_2''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y_2(t)\right]} \\
&\quad + \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]
\end{aligned}
$$

Construção da Função de Green

$$
\begin{aligned}
D_t[G(t,t')] &= \left[\frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t)\right] G(t,t') \\
&= C_1 y_1''(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2''(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right]\delta(t-t') + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t') \\
&\quad + P(t)\Big[C_1 y_1'(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2'(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\delta(t-t')\Big] \\
&\quad + C_1 Q(t) y_1(t)\theta(t'-t) + C_2 Q(t) y_2(t)\theta(t-t') \\
&= \theta(t'-t) C_1 \cancel{\left[y_1''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y_1(t)\right]} \\
&\quad + \theta(t-t') C_2 \cancel{\left[y_2''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y_2(t)\right]} \\
&\quad + \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]
\end{aligned}
$$

Construção da Função de Green

$$
\begin{aligned}
D_t[G(t,t')] &= \left[\frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t)\right] G(t,t') \\
&= C_1 y_1''(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2''(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right]\delta(t-t') + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t') \\
&\quad + P(t)\Big[C_1 y_1'(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2'(t)\theta(t-t') \\
&\quad + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\delta(t-t')\Big] \\
&\quad + C_1 Q(t) y_1(t)\theta(t'-t) + C_2 Q(t) y_2(t)\theta(t-t') \\
&= \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right] \\
&\quad + \delta(t-t')\left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right] + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t')
\end{aligned}
$$

Construção da Função de Green

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]$$
$$+\,\delta(t-t')\left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right] + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t')$$
$$= \delta(t-t')$$

$$\implies \begin{aligned} C_2 y_2(t') - C_1 y_1(t') &= 0 \\ C_2 y_2'(t') - C_1 y_1'(t') &= 1 \end{aligned}$$

- Essas equações lineares podem ser escritos na forma

$$\begin{pmatrix} -y_1(t') & y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Construção da Função de Green

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]$$
$$+\,\delta(t-t')\left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right] + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t')$$
$$= \delta(t-t')$$

$$\implies \begin{aligned} C_2 y_2(t') - C_1 y_1(t') &= 0 \\ C_2 y_2'(t') - C_1 y_1'(t') &= 1 \end{aligned}$$

- Essas equações lineares podem ser escritos na forma

$$\begin{pmatrix} -y_1(t') & y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Construção da Função de Green

$$
\begin{aligned}
D_t[G(t,t')] = {} & \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right] \\
& + \delta(t-t')\left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right] + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t') \\
= {} & \delta(t-t')
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \begin{aligned} C_2 y_2(t') - C_1 y_1(t') &= 0 \\ C_2 y_2'(t') - C_1 y_1'(t') &= 1 \end{aligned}
$$

- Essas equações lineares podem ser escritos na forma

$$
\begin{pmatrix} -y_1(t') & y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
D_t[G(t,t')] = {} & \delta(t-t')P(t)\left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right] \\
& + \delta(t-t')\left[C_2 y_2'(t) - C_1 y_1'(t)\right] + \left[C_2 y_2(t) - C_1 y_1(t)\right]\frac{d}{dt}\delta(t-t') \\
= {} & \delta(t-t')
\end{aligned}
$$

$$
\implies \begin{aligned} C_2 y_2(t') - C_1 y_1(t') &= 0 \\ C_2 y_2'(t') - C_1 y_1'(t') &= 1 \end{aligned}
$$

- Essas equações lineares podem ser escritos na forma

$$
\begin{pmatrix} -y_1(t') & y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

- Essas equações lineares podem ser escritos na forma

$$\begin{pmatrix} -y_1(t') & y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- A solução existe pois a determinante do matriz não é nulo

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -y_1(t') & y_2(t') \\ -y_1'(t') & y_2'(t') \end{pmatrix} &= -\left[y_1(t')y_2'(t') - y_2(t')y_1'(t')\right] \\ &= -W[y_1(t'), y_2(t')] \neq 0 \end{aligned}$$

- A solução é

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{y_2(t')}{W[y_1(t'), y_2(t')]} \\ C_2 &= \frac{y_1(t')}{W[y_1(t'), y_2(t')]} \end{aligned}$$

Construção da Função de Green

- A solução é

$$C_1 = \frac{y_2(t')}{W[y_1(t'), y_2(t')]}$$
$$C_2 = \frac{y_1(t')}{W[y_1(t'), y_2(t')]}$$

- Assim, a função de Green é

$$\begin{aligned} G(t,t') &= C_1 y_1(t)\theta(t'-t) + C_2 y_2(t)\theta(t-t') \\ &= \frac{1}{W[y_1(t'), y_2(t')]}\left[y_2(t')y_1(t)\theta(t'-t) + y_1(t')y_2(t)\theta(t-t')\right] \end{aligned}$$

Unicidade da Função de Green

- Note que a função de Green não é unívoca. y_1, e y_2 foram soluções linearmente independentes arbitrárias.
- De fato, se temos uma $G_0(t, t')$ que satisfaz a equação

$$D_t[G_0(t, t')] = \delta(t - t'),$$

qualquer outra combinação da forma

$$G(t, t') = G_0(t, t') + Z(t, t')$$

também satisfeita a equação se

$$D_t[Z(t, t')] = 0.$$

Função de Green retardada

$$G_0(t,t') = \frac{1}{W[y_1(t'),y_2(t')]}\left[y_2(t')y_1(t)\theta(t'-t) + y_1(t')y_2(t)\theta(t-t')\right]$$
$$G(t,t') = G_0(t,t') + Z(t,t')$$

- De fato, escolhendo $Z(t,t') = \dfrac{-y_2(t')y_1(t)}{W[y_1(t'),y_2(t')]}$, temos $D_t[Z(t,t')] = 0$ pois y_1 é solução da equação homogênea.
- Com essa escolha, obtemos que a G se anula para $t' > t$ ou

$$G(t,t') = \theta(t-t')\frac{y_1(t')y_2(t) - y_2(t')y_1(t)}{W[y_1(t'),y_2(t')]}$$

e a solução particular da EDL não homogênea tem o termo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t')f(t') = \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(t,t')f(t').$$

- Essa função de Green é chamada de função de Green retardada.

Função de Green retardada

$$G_0(t,t') = \frac{1}{W[y_1(t'), y_2(t')]}\left[y_2(t')y_1(t)\theta(t'-t) + y_1(t')y_2(t)\theta(t-t')\right]$$
$$G(t,t') = G_0(t,t') + Z(t,t')$$

- De fato, escolhendo $Z(t,t') = \frac{-y_2(t')y_1(t)}{W[y_1(t'), y_2(t')]}$, temos $D_t[Z(t,t')] = 0$ pois y_1 é solução da equação homogênea.
- Com essa escolha, obtemos que a G se anula para $t' > t$ ou

$$G(t,t') = \theta(t-t')\frac{y_1(t')y_2(t) - y_2(t')y_1(t)}{W[y_1(t'), y_2(t')]}$$

e a solução particular da EDL não homogênea tem o termo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t')f(t') = \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(t,t')f(t').$$

- Essa função de Green é chamada de função de Green retardada.

Função de Green retardada

$$G_0(t,t') = \frac{1}{W[y_1(t'),y_2(t')]}\left[y_2(t')y_1(t)\theta(t'-t) + y_1(t')y_2(t)\theta(t-t')\right]$$
$$G(t,t') = G_0(t,t') + Z(t,t')$$

- De fato, escolhendo $Z(t,t') = \dfrac{-y_2(t')y_1(t)}{W[y_1(t'),y_2(t')]}$, temos $D_t[Z(t,t')] = 0$ pois y_1 é solução da equação homogênea.
- Com essa escolha, obtemos que a G se anula para $t' > t$ ou

$$G(t,t') = \theta(t-t')\frac{y_1(t')y_2(t) - y_2(t')y_1(t)}{W[y_1(t'),y_2(t')]}$$

  e a solução particular da EDL não homogênea tem o termo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t')f(t') = \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(t,t')f(t').$$

- Essa função de Green é chamada de função de Green retardada.

Causalidade

- Existe aqui uma ideia de causalidade.
- Considere uma equação não homogênea onde t representa tempo. Normalmente nas sistemas físicas a interpretação é

$$\underbrace{D_t[y(t)]}_{\text{eq. de movimento}} = \underbrace{f(t)}_{\text{força externa}} .$$

  (Por exemplo o oscilador harmônico forçado.)
- No caso da função de Green retardada, a solução da equação não homogênea depende da força externa assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f(t') = \int_{-\infty}^{t} dt' G(t,t') f(t'),$$

  que respeita a condição de causalidade, ou seja, a solução $y(t)$ depende somente na força externa $f(t')$ em $t' < t$. I.e., $f(t')$ é a causa do $y(t)$, e o comportamento de $f(t')$ depois do tempo t não tem efeito.

Invariância por translação / no tempo

- Considere uma sistema com invariância por translação, ou seja, descrito por o operador

$$D_t = \frac{d^2}{dt^2} + P\frac{d}{dt} + Q.$$

  com $P =$ constante e $Q =$ constante.
- Essa equação tem uma invariância por translação — é a mesma para todo valor de t.
- Neste caso, a função de Green também tem uma propriedade simples.

- A função de Green satisfaz a relação

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$$

- Uma translação transforma a função de Green $G(t,t') \to G(t+a,t'+a)$, ou seja num tempo $t \to t+a$, a função de Green satisfaz

$$D_{t+a}[G(t+a,t'+a)] = \delta(t+a-t'-a) = \delta(t-t')$$

- Quando a sistema tem invariância por translações (ou neste caso invariância no tempo), a função de Green não depende da translação a:

$$G(t+a,t'+a) = G(t,t'), \quad \forall a.$$

- Escolhendo $a = -t'$, temos

$$G(t,t') = G(t-t',0),$$

que é uma função somente da combinação $t-t'$, e não os variáveis t e t' independentemente.

$$G(t,t') = G(t-t').$$