Função de Green (1)

Uma breve introdução a teoria das equações diferenciais lineares (ordenárias) de segunda ordem:

- Forma geral:

$$A(t)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B(t)\frac{dy(t)}{dt} + C(t)y(t) = F(t)$$

- Costumamos dividir a equação acima por $A(t)$ (tenha quidado com pontos onde $A(t)$ se anula!) e aí obtemos

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = f(t).$$

- Se $f(t) = 0$, a equação é dita homogênea. Se não ela é chamada de não-homogênea.
- Supomos aqui neste primeiro tratamento que P, Q, f são analíticas em t.

Função de Green (1)

Uma breve introdução a teoria das equações diferenciais lineares (ordenárias) de segunda ordem:

- Forma geral:

$$A(t)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B(t)\frac{dy(t)}{dt} + C(t)y(t) = F(t)$$

- Costumamos dividir a equação acima por $A(t)$ (tenha quidado com pontos onde $A(t)$ se anula!) e aí obtemos

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = f(t).$$

- Se $f(t) = 0$, a equação é dita homogênea. Se não ela é chamada de não-homogênea.
- Supomos aqui neste primeiro tratamento que P, Q, f são analíticas em t.

Função de Green (1)

Uma breve introdução a teoria das equações diferenciais lineares (ordenárias) de segunda ordem:

- Forma geral:

$$A(t)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B(t)\frac{dy(t)}{dt} + C(t)y(t) = F(t)$$

- Costumamos dividir a equação acima por $A(t)$ (tenha quidado com pontos onde $A(t)$ se anula!) e aí obtemos

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = f(t).$$

- Se $f(t) = 0$, a equação é dita homogênea. Se não ela é chamada de não-homogênea.
- Supomos aqui neste primeiro tratamento que P, Q, f são analíticas em t.

Equação homogênea

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = 0$$

- Essa equação é linear: se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, a sua soma $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ também é, onde C_1 e C_2 são constantes. (Prove isso!)
- Note que no caso homogêneo $y(t) = 0$ é sempre solução (o mesmo não é verdade para a equação não homogênea).

Definição (Independência linear)

Duas soluções são chamadas de linearmente independentes se nenhuma delas for múltipla da outra. I.e., se a condição

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = 0, \qquad \forall t$$

no intervalo considerado, é satisfeita somente se $C_1 = C_2 = 0$.

Equação homogênea

- A dependência linear das soluções pode ser verificada se conhecemos seus valores e o valor de sua primeira derivada em um dado ponto $t = t_0$:
  Se
  $$y_1(t_0) = k y_2(t_0)$$
  e
  $$y_1'(t_0) = k y_2'(t_0)$$
  (com k constante), então y_1 e y_2 são linearmente dependentes.
- Vamos mostrar:

Equação homogênea

- A dependência linear das soluções pode ser verificada se conhecemos seus valores e o valor de sua primeira derivada em um dado ponto $t = t_0$:
  Se
  $$y_1(t_0) = ky_2(t_0)$$
  e
  $$y_1'(t_0) = ky_2'(t_0)$$
  (com k constante), então y_1 e y_2 são linearmente dependentes.
- Vamos mostrar:

Equação homogênea

- Note primeiro que se y_1 e y_2 são soluções

$$\begin{aligned} y_1''(t) + P(t)y_1'(t) + Q(t)y_1(t) &= 0 \\ y_1''(t) &= -P(t)y_1'(t) - Q(t)y_1(t) \\ y_1''(t_0) &= -P(t)y_1'(t_0) - Q(t)y_1(t_0) \end{aligned}$$

Se $y_1(t_0) = ky_2(t_0)$ e $y_1'(t_0) = ky_2'(t_0)$, então

$$\begin{aligned} y_1''(t_0) &= -P(t)ky_2'(t_0) - Q(t)ky_2(t_0) \\ &= ky_2''(t_0) \end{aligned}$$

e assim $y_1^{(n)}(t_0) = ky_2^{(n)}(t_0)\ \forall n$

- Agora, se

$$\frac{y_1(t_0)}{y_2(t_0)} \neq \frac{y_1'(t_0)}{y_2'(t_0)}$$

num dado t_0 essa soluções são linearmente independentes.

Wronskiano

- Para demonstrar isso, introduzimos o Wronskiano das duas soluções

$$W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

- Note que para soluções acima, tal que $y_1^{(n)}(t_0) = ky_2^{(n)}(t_0)$,

$$W[y_1(t_0), y_2(t_0)] = 0.$$

- O Wronskiano possui uma propriedade muito importante: $W[y_1(t), y_2(t)]$ é identicamente nulo ($\forall t$), ou nunca se anula.
- Demonstração:

Wronskiano

- Para demonstrar isso, introduzimos o Wronskiano das duas soluções

$$W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

- Note que para soluções acima, tal que $y_1^{(n)}(t_0) = ky_2^{(n)}(t_0)$,

$$W[y_1(t_0), y_2(t_0)] = 0.$$

- O Wronskiano possui uma propriedade muito importante: $W[y_1(t), y_2(t)]$ é identicamente nulo $(\forall t)$, ou <u>nunca</u> se anula.
- Demonstração:

Wronskiano

- Para demonstrar isso, introduzimos o Wronskiano das duas soluções

$$W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

- Note que para soluções acima, tal que $y_1^{(n)}(t_0) = ky_2^{(n)}(t_0)$,

$$W[y_1(t_0), y_2(t_0)] = 0.$$

- O Wronskiano possui uma propriedade muito importante: $W[y_1(t), y_2(t)]$ é identicamente nulo ($\forall t$), ou <u>nunca</u> se anula.
- Demonstração:

Wronskiano

- Para demonstrar isso, introduzimos o Wronskiano das duas soluções

$$W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

- Note que para soluções acima, tal que $y_1^{(n)}(t_0) = ky_2^{(n)}(t_0)$,

$$W[y_1(t_0), y_2(t_0)] = 0.$$

- O Wronskiano possui uma propriedade muito importante: $W[y_1(t), y_2(t)]$ é identicamente nulo ($\forall t$), ou <u>nunca</u> se anula.
- Demonstração:

W=0

- Seja y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right]$$
$$= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

- Assim, como

$$y_1'' = -Py_1' - Qy_1$$
$$y_2'' = -Py_2' - Qy_2$$

obtemos

$$y_1y_2'' + Py_1y_2' + Qy_1y_2 = 0$$
$$y_1''y_2 + Py_1'y_2 + Qy_1y_2 = 0$$

- Subtraindo as duas equações:

$$\underbrace{y_1y_2'' - y_2y_1''}_{\frac{dW}{dt}} + P\underbrace{\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)}_{W[y_1,y_2]} = 0$$

W=0

- Seja y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right]$$
$$= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

- Assim, como

$$y_1'' = -Py_1' - Qy_1$$
$$y_2'' = -Py_2' - Qy_2$$

obtemos

$$y_1y_2'' + Py_1y_2' + Qy_1y_2 = 0$$
$$y_1''y_2 + Py_1'y_2 + Qy_1y_2 = 0$$

- Subtraindo as duas equações:

$$\underbrace{y_1y_2'' - y_2y_1''}_{\frac{dW}{dt}} + P\underbrace{\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)}_{W[y_1,y_2]} = 0$$

W=0

- Seja y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right]$$
$$= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

- Assim, como

$$y_1'' = -Py_1' - Qy_1$$
$$y_2'' = -Py_2' - Qy_2$$

obtemos

$$y_1y_2'' + Py_1y_2' + Qy_1y_2 = 0$$
$$y_1''y_2 + Py_1'y_2 + Qy_1y_2 = 0$$

- Subtraindo as duas equações:

$$\underbrace{y_1y_2'' - y_2y_1''}_{\frac{dW}{dt}} + P\underbrace{\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)}_{W[y_1,y_2]} = 0$$

W=0

- Seja y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right] \\ &= y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''\end{aligned}$$

- Assim, como

$$\begin{aligned} y_1'' &= -Py_1' - Qy_1 \\ y_2'' &= -Py_2' - Qy_2 \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} y_1 y_2'' + Py_1 y_2' + Qy_1 y_2 &= 0 \\ y_1'' y_2 + Py_1' y_2 + Qy_1 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Subtraindo as duas equações:

$$\underbrace{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}_{\frac{dW}{dt}} + P\underbrace{\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)}_{W[y_1, y_2]} = 0$$

W=0

- Subtraindo as duas equações:

$$\underbrace{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}_{\frac{dW}{dt}} + P\underbrace{\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)}_{W[y_1, y_2]} = 0$$

- Então,

$$\frac{d}{dt} W[y_1, y_2] + P(t) W[y_1, y_2] = 0$$

e a solução é

$$W[t] = W[t_0] e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi) d\xi}$$

onde $W[t_0] = W[y_1(t_0), y_2(t_0)]$ é o valor em $t = t_0$ (arbitrário).

- Uma vez que a exponencial nunca se anula, $W[t] = 0$ se $W[t_0] = 0$ ou então $W[t]$ nunca se anula.

W=0

- Subtraindo as duas equações:

$$\underbrace{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}_{\frac{dW}{dt}} + P \underbrace{\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)}_{W[y_1, y_2]} = 0$$

- Então,

$$\frac{d}{dt} W[y_1, y_2] + P(t) W[y_1, y_2] = 0$$

e a solução é

$$W[t] = W[t_0] e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi) d\xi}$$

onde $W[t_0] = W[y_1(t_0), y_2(t_0)]$ é o valor em $t = t_0$ (arbitrário).

- Uma vez que a exponencial nunca se anula, $W[t] = 0$ se $W[t_0] = 0$ ou então $W[t]$ nunca se anula.

W=0

- Uma vez que a exponencial nunca se anula, $W[t] = 0$ se $W[t_0] = 0$ ou então $W[t]$ nunca se anula.
- Note qu, se

$$\frac{y_1(t_0)}{y_2(t_0)} \neq \frac{y_1'(t_0)}{y_2'(t_0)}$$

então,

$$y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_2(t_0)y_1'(t_0) = W[t_0] \neq 0.$$

- Então, $W(t)$ nunca pode se anular e y_1 e y_2 não podem ser linearmente dependente e assim eles tem que ser linearmente independentes.

Solução geral da equação homogênea

- A solução da equação diferencial de segunda ordem fica completamente determinada se soubermos $y(t_0)$ e $y'(t_0)$ para um dado t_0.
- Por sua vez, sabendo duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2,

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

  é a solução mais geral da equação homogênea de segunda ordem.
- C_1 e C_2 são determinados pelas condições iniciais $y(t_0)$ e $y'(t_0)$:
- De fato, seja $y(t)$ uma solução da forma acima com valores dados em um dado t_0

$$y(t_0) \equiv a, \quad y'(t_0) \equiv b$$

$$\implies y''(t_0) = C_1 y_1''(t_0) + C_2 y_2''(t_0)$$
$$= C_1 \left[-P(t_0)y_1'(t_0) - Q(t_0)y_1(t_0)\right] + C_2 \left[-P(t_0)y_2'(t_0) - Q(t_0)y_2(t_0)\right]$$

Solução geral da equação homogênea

$$y(t_0) \equiv a, \quad y'(t_0) \equiv b$$

$$\implies y''(t_0) = C_1 y_1''(t_0) + C_2 y_2''(t_0)$$
$$= C_1 \left[-P(t_0)y_1'(t_0) - Q(t_0)y_1(t_0)\right] + C_2 \left[-P(t_0)y_2'(t_0) - Q(t_0)y_2(t_0)\right]$$

e como $y(t)$ é solução

$$\begin{aligned} y''(t_0) &= -\left[P(t_0)y'(t_0) + Q(t_0)y(t_0)\right] \\ &= -P(t_0)b - Q(t_0)a. \end{aligned}$$

- Assim, $\quad P(t_0)b + Q(t_0)a$

$$= C_1 P(t_0)y_1'(t_0) + C_1 Q(t_0)y_1(t_0) + C_2 P(t_0)y_2'(t_0) + C_2 Q(t_0)y_2(t_0)$$
$$= P(t_0)\left[C_1 y_1'(t_0) + C_2 y_2'(t_0)\right] + Q(t_0)\left[C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0)\right]$$

e dessa forma

$$\begin{aligned} a &= C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ b &= C_1 y_1'(t_0 + C_2 y_2'(t_0)) \end{aligned}$$

Solução geral da equação homogênea

$$a = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0)$$
$$b = C_1 y_1'(t_0 + C_2 y_2'(t_0))$$

- Podemos resolver essas equações para enconotrar C_1 e C_2. Essa solução existe pois o determinante

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0 \end{pmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_2(t_0)y_1'(t_0) = W(t_0) \neq 0$$

já que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Solução geral da equação homogênea

- Agora, suponha que só conhecemos uma solução $y_1(t)$ da EDL de 2a ordem. Podemos encontrar uma solução linearmente independente $y_2(t)$ da seguinte forma:
- Note que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}.$$

- Por outro lado, vimos que

$$W[t] = W[t_0] e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi) d\xi}$$

- Assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W(t_0)}{y_1^2(t)} e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi) d\xi}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \underbrace{W(t_0)}_{\text{constante}} \int_{t_1}^{t} dt' \frac{1}{y_1^2(t')} e^{-\int_{t_0}^{t'} P(\xi) d\xi}$$

t_0 e t_1 são arbitrários. Assim sabemos y_2 a menos de uma constante.

Solução geral da equação homogênea

- Agora, suponha que só conhecemos uma solução $y_1(t)$ da EDL de 2a ordem. Podemos encontrar uma solução linearmente independente $y_2(t)$ da seguinte forma:
- Note que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}.$$

- Por outro lado, vimos que

$$W[t] = W[t_0] e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi) d\xi}$$

- Assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W(t_0)}{y_1^2(t)} e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi) d\xi}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \underbrace{W(t_0)}_{\text{constante}} \int_{t_1}^{t} dt' \frac{1}{y_1^2(t')} e^{-\int_{t_0}^{t'} P(\xi) d\xi}$$

t_0 e t_1 são arbitrários. Assim sabemos y_2 a menos de uma constante.

Solução geral da equação homogênea

- Agora, suponha que só conhecemos uma solução $y_1(t)$ da EDL de 2a ordem. Podemos encontrar uma solução linearmente independente $y_2(t)$ da seguinte forma:
- Note que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}.$$

- Por outro lado, vimos que

$$W[t] = W[t_0]e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi)d\xi}$$

- Assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W(t_0)}{y_1^2(t)}e^{-\int_{t_0}^{t} P(\xi)d\xi}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \underbrace{W(t_0)}_{\text{constante}} \int_{t_1}^{t} dt' \frac{1}{y_1^2(t')} e^{-\int_{t_0}^{t'} P(\xi)d\xi}$$

t_0 e t_1 são arbitrários. Assim sabemos y_2 a menos de uma constante.

Equação não-homogênea: Função de Green

- Seja D_t o operador diferencial linear da segunda ordem

$$D_t = \frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t).$$

Assim, $D_t[y(t)] = f(t)$ representa a equação não homogênea

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t) = f(t)$$

Definição (Função de Green)

Associado a este operador diferencial D_t está a função de Green $G(t,t')$ definida via

$$D_t[G(t,t')] = \delta(t - t')$$

- Dadas as equações $D_t[y(t)] = f(t), \qquad D_t[G(t,t')] = \delta(t-t'),$
  $\implies y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t') f(t')$ é solução:

$$D_t[y(t)] = D_t\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t') f(t')\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t') D_t[G(t,t')]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t') \delta(t-t') = f(t)$$

- Note que essa solução se anula quando $f(t) = 0$. Ou seja, ela só aparece quando a equação diferencial não é homogênea.
- A solução geral da EDL $D_t[y(t)] = f(t)$ é

$$y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{parte homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t') f(t')$$

onde y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea

$$D_t[y_1(t)] = D_t[y_2(t)] = 0$$

Função de Green

- Dadas as equações $D_t[y(t)] = f(t), \qquad D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$,
  $\implies \; y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t') f(t')$ é solução:

$$D_t[y(t)] = D_t\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t') f(t')\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t') D_t[G(t,t')]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\delta(t-t') = f(t)$$

- Note que essa solução se anula quando $f(t) = 0$. Ou seja, ela só aparece quando a equação diferencial não é homogênea.
- A solução geral da EDL $D_t[y(t)] = f(t)$ é

$$y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{parte homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t') f(t')$$

onde y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea

$$D_t[y_1(t)] = D_t[y_2(t)] = 0$$

Função de Green

- Dadas as equações $D_t[y(t)] = f(t), \qquad D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$,
  $\implies y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f(t')$ é solução:

$$D_t[y(t)] = D_t\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f(t')\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') D_t[G(t,t')]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t-t') = f(t)$$

- Note que essa solução se anula quando $f(t) = 0$. Ou seja, ela só aparece quando a equação diferencial não é homogênea.
- A solução geral da EDL $D_t[y(t)] = f(t)$ é

$$y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{parte homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f(t')$$

onde y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea

$$D_t[y_1(t)] = D_t[y_2(t)] = 0$$

Função de Green

- Dadas as equações $D_t[y(t)] = f(t), \qquad D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$,

  $\implies y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f(t')$ é solução:

$$D_t[y(t)] = D_t\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f(t')\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') D_t[G(t,t')]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t-t') = f(t)$$

- Note que essa solução se anula quando $f(t) = 0$. Ou seja, ela só aparece quando a equação diferencial não é homogênea.
- A solução geral da EDL $D_t[y(t)] = f(t)$ é

$$y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{parte homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f(t')$$

  onde y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea

$$D_t[y_1(t)] = D_t[y_2(t)] = 0$$

Função de Green

- Dadas as equações $D_t[y(t)] = f(t), \qquad D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$,

  $\implies \; y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t')f(t')$ é solução:

$$D_t[y(t)] = D_t\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t')f(t')\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')D_t[G(t,t')]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\delta(t-t') = f(t)$$

- Note que essa solução se anula quando $f(t) = 0$. Ou seja, ela só aparece quando a equação diferencial não é homogênea.
- A solução geral da EDL $D_t[y(t)] = f(t)$ é

$$y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{parte homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t,t')f(t')$$

  onde y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea

$$D_t[y_1(t)] = D_t[y_2(t)] = 0$$

Função de Green

- Dadas as equações $D_t[y(t)] = f(t), \qquad D_t[G(t,t')] = \delta(t-t')$,
  $\implies y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t') f(t')$ é solução:

$$D_t[y(t)] = D_t\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t') f(t')\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, f(t') D_t[G(t,t')]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, f(t') \delta(t-t') = f(t)$$

- Note que essa solução se anula quando $f(t) = 0$. Ou seja, ela só aparece quando a equação diferencial não é homogênea.
- A solução geral da EDL $D_t[y(t)] = f(t)$ é

$$y(t) = \underbrace{C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}_{\text{parte homogênea}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t') f(t')$$

  onde y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea

$$D_t[y_1(t)] = D_t[y_2(t)] = 0$$