Transformada de Fourier e Teoria das Distribuições (3)

Transformada de Fourier e inversa

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}$$

Convolução

- Seja a função $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x,x')g(x')$$
- Vamos supor que
  1. $G(x,x') = G(x-x')$ (invariância por translação).
  2. Tanto $f(x)$, $G(x)$, e $g(x)$ possuem transformada de Fourier dadas, respectivamente, por

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} G(x)$$

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g(x)$$

- Dizemos que f é a convolução de G e g.
- Nesse caso, o seguinte resultado é válido

$$\tilde{f}(k) = \tilde{G}(k)\tilde{g}(k)\sqrt{2\pi}.$$

Convolução

- Seja a função $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x, x') g(x')$$
- Vamos supor que
  1. $G(x, x') = G(x - x')$ (invariância por translação).
  2. Tanto $f(x)$, $G(x)$, e $g(x)$ possuem transformada de Fourier dadas, respectivamente, por

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} G(x)$$

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g(x)$$

- Dizemos que f é a convolução de G e g.
- Nesse caso, o seguinte resultado é válido

$$\tilde{f}(k) = \tilde{G}(k)\tilde{g}(k)\sqrt{2\pi}.$$

Transformada de Convolução

Prova: Começamos coma definição de $f(x)$ e sua transformada de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x')g(x')$$
$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x).$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx} G(x - x')g(x')$$

Trocando os integrais e mudando variáveis $x \to x + x'$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik(x+x')} G(x)g(x')$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} g(x') \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik(x)} G(x)$$
$$= \sqrt{2\pi}\tilde{g}(k)\tilde{G}(k)$$

Essa é a propriedade de convolução da transformada de Fourier.

Teorema de Parseval

Podemos também mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k)$$

Prova:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f^*(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} g(x')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik(x-x')}}{2\pi}}_{\delta(x-x')}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x')\delta(x-x')}_{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) g(x$$

Note que, (com $f^* \to f^*$ e $g \to f$); $\int_{-\infty}^{\infty} dx \left|f(x)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left|\tilde{f}(k)\right|^2$

Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left| \tilde{f}(k) \right|^2$$

- É o Teorema de Parseval.
- Em mecânica quântica, isso expressa a ideia de que a probabilidade é conservada (não importa se você está descrevendo a função de onda no espaço das coordenadas x ou no espaço dos “momentos” k).

Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left|\tilde{f}(k)\right|^2$$

- É o Teorema de Parseval.
- Em mecânica quântica, isso expressa a ideia de que a probabilidade é conservada (não importa se você está descrevendo a função de onda no espaço das coordenadas x ou no espaço dos "momentos" k).

Transformadas seno e cosseno de Fourier

- Seja $f(x)$ uma função real par, $\quad f(x) = f^*(x); \quad f(x) = f(-x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x') \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} 2 \int_{0}^{\infty} dx' \cos(kx') f(x') \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \underbrace{\cos(kx')}_{\text{par em } k} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \cos(kx') \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \cos(kx') \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \tilde{f}_c(k)
\end{aligned}
$$

Transformadas seno e cosseno de Fourier

- Seja $f(x)$ uma função real par, $\quad f(x) = f^*(x); \quad f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x')$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} 2 \int_{0}^{\infty} dx' \cos(kx') f(x')$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \underbrace{\cos(kx')}_{\text{par em } k}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \cos(kx')$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \cos(kx')$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \tilde{f}_c(k)$$

Transformadas seno e cosseno de Fourier

- Seja $f(x)$ uma função real par, $\quad f(x) = f^*(x); \quad f(x) = f(-x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x') \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} 2 \int_{0}^{\infty} dx' \cos(kx') f(x') \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \underbrace{\cos(kx')}_{\text{par em } k} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \cos(kx') \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dx' f(x') \cos(kx') \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \tilde{f}_c(k)
\end{aligned}
$$

Transformadas seno e cosseno de Fourier

- Essa fórmula sugere algo similar ao que tivemos na série de Fourier:
- Suponha que $f(x)$ (agora sem paridade definida em princípio) esteja definida somente no intervalo $[0,\infty)$. Podemos construir a sua extensão simétrica (ou par) como

$$\begin{aligned} f_{\text{par}}(x) &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases} \\ &= f(x)\theta(x) + f(-x)\theta(-x). \end{aligned}$$

- Note que a integral de Fourier dessa f_{par} fica

$$\begin{aligned} f_{\text{par}}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f_{\text{par}}(x') \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{0}^{\infty} dx' \cos(kx') f_{\text{par}}(x') \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} dx' f(x') \cos(kx') \end{aligned}$$

Transformadas seno e cosseno de Fourier

- Essa fórmula sugere algo similar ao que tivemos na série de Fourier:
- Suponha que $f(x)$ (agora sem paridade definida em princípio) esteja definida somente no intervalo $[0, \infty)$. Podemos construir a sua extensão simétrica (ou par) como

$$f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$
$$= f(x)\theta(x) + f(-x)\theta(-x).$$

- Note que a integral de Fourier dessa f_{par} fica

$$f_{\text{par}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f_{\text{par}}(x')$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{0}^{\infty} dx' \cos(kx') f_{\text{par}}(x')$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} dk \cos(kx) \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} dx' f(x') \cos(kx')$$

Transformadas seno e cosseno de Fourier

- Nesta perspectiva, definimos a transformada de Fourier em cosseno como

$$F_c(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx f(x) \cos(kx)$$
$$f(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk F_c(k) \cos(kx)$$

- A versão impar dessa transformada, chamada de transformada em seno de Fourier, é definida de forma análoga

$$F_s(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx f(x) \,\mathrm{sen}(kx)$$
$$f(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk F_s(k) \,\mathrm{sen}(kx)$$

- Exercício: Estude o que ocorre com a convolução dessas transformadas.

Transformadas seno e cosseno de Fourier

- Nesta perspectiva, definimos a transformada de Fourier em cosseno como

$$F_c(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx f(x) \cos(kx)$$

$$f(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk F_c(k) \cos(kx)$$

- A versão impar dessa transformada, chamada de transformada em seno de Fourier, é definida de forma análoga

$$F_s(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx f(x) \operatorname{sen}(kx)$$

$$f(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk F_s(k) \operatorname{sen}(kx)$$

- Exercício: Estude o que ocorre com a convolução dessas transformadas.

Transformadas seno e cosseno de Fourier

- Nesta perspectiva, definimos a transformada de Fourier em cosseno como

$$F_c(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx f(x) \cos(kx)$$
$$f(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk F_c(k) \cos(kx)$$

- A versão impar dessa transformada, chamada de transformada em seno de Fourier, é definida de forma análoga

$$F_s(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx f(x) \,\mathrm{sen}(kx)$$
$$f(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk F_s(k) \,\mathrm{sen}(kx)$$

- Exercício: Estude o que ocorre com a convolução dessas transformadas.

Transformada de Fourier de distribuições

- Considere uma sequência de funções rapidamente decrescentes (r.d.) que define uma distribuição, $\{f_n(x), n = 1, 2, 3, \ldots\} \simeq f(x)$
- Nós vimos que a transformada de Fourier de uma função r.d. é uma função também r.d.
- Dessa forma, cada $f_n(x)$ da sequência possui sua transformada de Fourier

$$F_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f_n(x) \equiv \mathcal{F}_k \left[f_n(x) \right]$$

- A sequência $\{F_n(k), n = 1, 2, 3, \ldots\} \equiv F(k)$ também define uma distribuição que é dita a transformada de Fourier da distribuição $f(x)$ e escrevemos, formalmente

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

embora estejamos cientes que $f(x)$ é uma distribuição e essa integral deve ser entendida em termos dos limites discutidos anteriormente.

Transformada de $\delta(x)$

- Exemplo: Transformada de $\delta(x)$

$$\mathcal{F}_k\left[\delta(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)e^{-ikx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

- Exercício: Faça a conta acima usando

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\delta_n(x)$$

onde δ_n é, por exemplo

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$$

- Exercício: Qual é a transformada de Fourier de x^n? Calcule utilizando a transformada inversa de $\delta(x)$.