# Transformada de Fourier e Teoria das Distribuições (1)

- Considere a série de Fourier de uma função $f(x)$ no intervalo $[-L, L]$, suave e de quadrado integrável, i.e., $\int_{-L}^{L} dx\, |f(x)|^2 < \infty$.
- A série de Fourier é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

- Também tem uma forma complexa:

# Transformada de Fourier

- Define $c_n \equiv L(a_n - ib_n), c_{-n} \equiv L(a_n + ib_n).$ Então

$$c_n = \int_{-L}^{L} dx f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$
$$= \int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$
$$c_{-n} = \int_{-L}^{L} dx f(x) e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$
$$\implies f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

- O que acontece no limite $L \to \infty$?

# Transformada de Fourier

- Define $c_n \equiv L(a_n - ib_n), c_{-n} \equiv L(a_n + ib_n)$. Então

$$c_n = \int_{-L}^{L} dx f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$= \int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$c_{-n} = \int_{-L}^{L} dx f(x) e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

- O que acontece no limite $L \to \infty$?

# Transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

- Agora, vamos definir

$$\Delta k \equiv \frac{\pi}{L}, \qquad k_n \equiv n\Delta k, \qquad F(k_n) \equiv c_n = \int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-ik_n x}$$

e obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k_n) \Delta k e^{ik_n x}.$$

- Consideremos agora o limite $\Delta k \to 0$ (ou $L \to \infty$). Os "$k_n$" viram uma variável contínua, "$k$":

$$k_n \to k, \qquad F(k_n) \to F(k), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \to \int_{-\infty}^{\infty} dk$$

# Transformada de Fourier

- Agora, vamos definir

$$\Delta k \equiv \frac{\pi}{L}, \qquad k_n \equiv n\Delta k, \qquad F(k_n) \equiv c_n = \int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-ik_n x}$$

e obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k_n) \Delta k e^{ik_n x}.$$

- Consideremos agora o limite $\Delta k \to 0$ (ou $L \to \infty$). Os "$k_n$" viram uma variável contínua, "$k$":

$$k_n \to k, \qquad F(k_n) \to F(k), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \to \int_{-\infty}^{\infty} dk$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}, \qquad F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

# Transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}$$
$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

- $F(k)$ é chamada de transformada de Fourier de $f(x)$ que, por sua vez é chamada de transformada de Fourier inversa de $F(k)$.
- A transformada de Fourier é uma operação linear

$$f(x) \to F(k) \equiv F[f(x)]$$
$$F[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F[f_1(x)] + \beta F[f_2(x)]$$

# Transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}$$
$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

- $F(k)$ é chamada de transformada de Fourier de $f(x)$ que, por sua vez é chamada de transformada de Fourier inversa de $F(k)$.
- A transformada de Fourier é uma operação linear

$$f(x) \rightarrow F(k) \equiv F[f(x)]$$
$$F[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F[f_1(x)] + \beta F[f_2(x)]$$

# Paridade da transformada de Fourier

- Se $f$ é par $f(x) = f(-x)$,

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} = 2\int_{0}^{\infty} dx f(x) \cos kx$$

- Se $f(x)$ é ímpar $f(x) = -f(-x)$,

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} = -2i\int_{0}^{\infty} dx f(x) \,\text{sen}\, kx$$

# Exemplo: Gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Com essa normalização:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

A transformada de Fourier é

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx) \end{aligned}$$

Truque: Complete o quadrado

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx = -\frac{2}{2\sigma^2}\left(x + ik\sigma^2\right)^2 - \frac{k^2}{2}\sigma^2$$

# Exemplo: Gaussiana

Truque: Complete o quadrado

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx = -\frac{2}{2\sigma^2}\left(x + ik\sigma^2\right)^2 - \frac{k^2}{2}\sigma^2$$

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x+ik\sigma^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}}; \qquad (x' = x + ik\sigma^2) \\
&= e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}
\end{aligned}$$

A transformada de Fourier é também gaussiana!

# Exemplo: Gaussiana

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$
- Note que neste caso $f(x)$ pode ser entendido como uma densidade de probabilidade já que $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 1$.
- $\implies$ podemos definir um valor médio e desvio padrão:

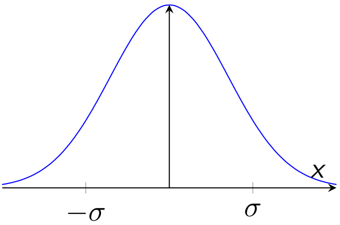
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{x}_{\text{impar}} = 0,$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^2 = \sigma^2$$

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sigma$$

- Então, $\sigma$ é a largura da Gaussiana

# Gaussiana

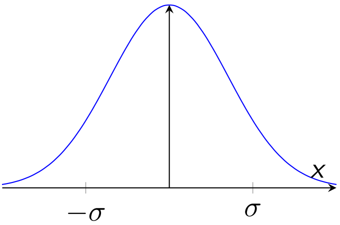



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \qquad F(k) = e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}$$

No espaço de Fourier, o desvio padrão é $\sqrt{\langle k^2 \rangle - \cancelto{0}{\langle k \rangle^2}} = \frac{1}{\sigma}$

Então, se a largura em $x$ aumenta, a largura em $k$ diminui! Essa característica é sempre presente em transformadas de distribuições de probabilidade e é a base matemática para o princípio da incerteza de Heisenberg.

# Gaussiana

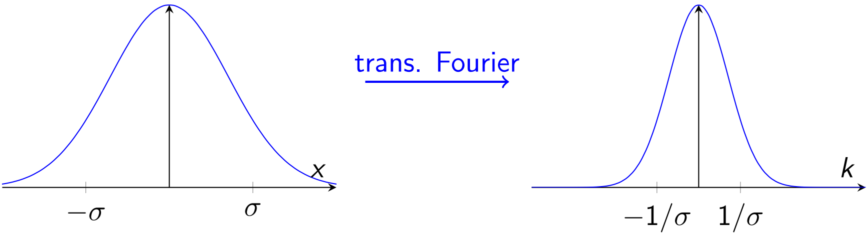



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \qquad F(k) = e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}$$

No espaço de Fourier, o desvio padrão é $\sqrt{\langle k^2\rangle - \cancelto{0}{\langle k\rangle^2}} = \dfrac{1}{\sigma}$

Então, se a largura em $x$ aumenta, a largura em $k$ diminui! Essa característica é sempre presente em transformadas de distribuições de probabilidade e é a base matemática para o princípio da incerteza de Heisenberg.

# Gaussiana

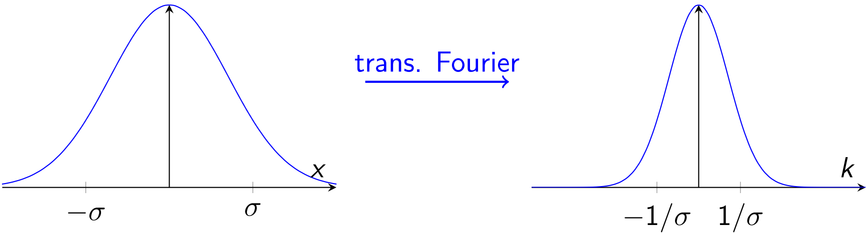



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \qquad F(k) = e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}$$

No espaço de Fourier, o desvio padrão é $\sqrt{\langle k^2\rangle - \cancelto{0}{\langle k\rangle^2}} = \frac{1}{\sigma}$

Então, se a largura em $x$ aumenta, a largura em $k$ diminui! Essa característica é sempre presente em transformadas de distribuições de probabilidade e é a base matemática para o princípio da incerteza de Heisenberg.

# Gaussiana




$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \qquad F(k) = e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}$$

No espaço de Fourier, o desvio padrão é $\sqrt{\langle k^2\rangle - \cancelto{0}{\langle k\rangle^2}} = \dfrac{1}{\sigma}$

Então, se a largura em $x$ aumenta, a largura em $k$ diminui! Essa característica é sempre presente em transformadas de distribuições de probabilidade e é a base matemática para o princípio da incerteza de Heisenberg.

# Versão simétrica da transformada de Fourier

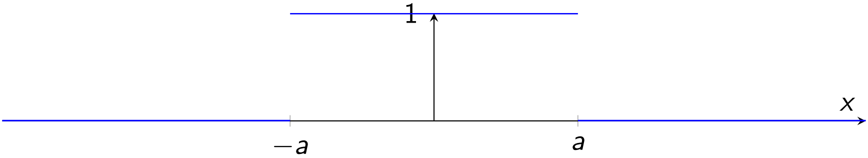
- É costume dividir o fator $\frac{1}{2\pi}$ em dois fatores de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ de forma que a transformada de Fourier e sua inversa sejam todas pela forma mais simétrica

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}$$

- Essa é a notação usada dos livros do Butkov e Arfken. Usaremos essa versão nessas aulas.

# Exemplo: onda retangular

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}; \quad a > 0$$



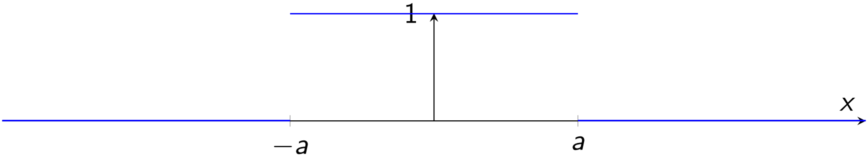

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-ika} - e^{ika} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{sen}(ak)}{k}$$

A transformada de Fourier pode existir mesmo com descontinuidades

# Exemplo: onda retangular

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}; \quad a > 0$$



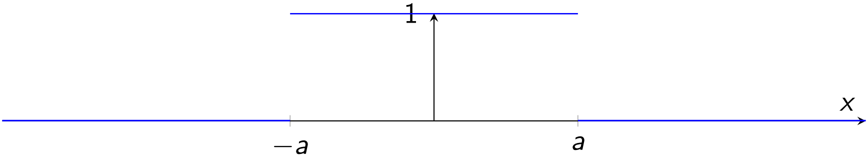

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-ika} - e^{ika} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(ak)}{k}$$

A transformada de Fourier pode existir mesmo com descontinuidades

# Exemplo: onda retangular

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}; \quad a > 0$$



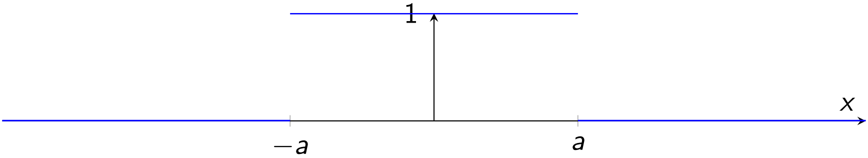

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-ika} - e^{ika} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{sen}(ak)}{k}$$

A transformada de Fourier pode existir mesmo com descontinuidades

# Exemplo: onda retangular

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}; \quad a > 0$$



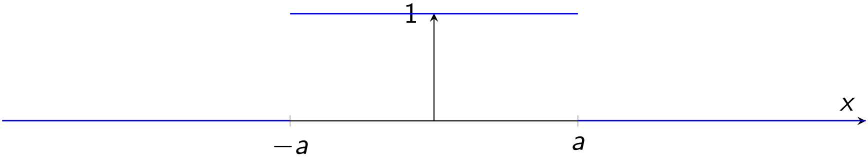

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-ika} - e^{ika} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{sen}(ak)}{k}$$

A transformada de Fourier pode existir mesmo com descontinuidades

# Exemplo: onda retangular

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}; \quad a > 0$$



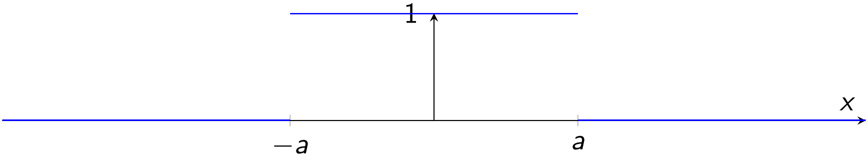

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-ika} - e^{ika} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(ak)}{k}$$

A transformada de Fourier pode existir mesmo com descontinuidades

# Exemplo: onda retangular

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}; \quad a > 0$$




$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-ika} - e^{ika} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{sen}(ak)}{k}$$

A transformada de Fourier pode existir mesmo com descontinuidades

# Existência da transformada de Fourier

- Uma condição para existência (suficiente mas não necessária) que sempre teremos em mente é a que diz que $f(x)$ é absolutamente integrável

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\,|f(x)| \qquad \text{existe}$$

- Como $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)|$ vemos

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$
$$|F(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| \qquad \to \text{finito}$$

# Simetrias da transformada de Fourier

- Em geral, por causa do $e^{-ikx}$, $F(k)$ é uma função complexa de variável real $k$.

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

- Se $f(x)$ é real

$$\begin{aligned} F^*(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f(x) \\ &= F(-k). \end{aligned}$$

# Simetrias da transformada de Fourier

- Se $f(x)$ é par, $f(x) = f(-x)$, então

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \underbrace{\cos(kx)}_{\text{par}} - i \underbrace{\operatorname{sen}(kx)}_{\text{impar}} \right) \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(kx) f(x)
\end{aligned}
$$

- A transformada de Fourier é real.
- Analogamente, se $f(x)$ é impar, $F(k)$ é imaginário puro.