Lembrete: Convergência pontual e em média

- $$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]$$
- Convergência ponto a ponto

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{em } a \le x \le b$$

- Convergência em média

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - f_n(x)\right]^2 dx = 0,$$

- Hoje: convergência uniforme

Lembrete: Convergência pontual e em média

- $$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]$$
- Convergência ponto a ponto
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{em } a \le x \le b$$
- Convergência em média
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 \, dx = 0,$$
- Hoje: convergência uniforme

Convergência em média, mas não pontual

- Convergência em média e convergência ponto a ponto não são equivalentes. Foi pedido a mostrar exemplos.
- Exemplo: converge em média mas não converge ponto a ponto

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- Sua série de Fourier é

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n+1)x]}{2n+1}$$

- Que converge para

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \neq f(x)$$

Convergência em média, mas não pontual

- Convergência em média e convergência ponto a ponto não são equivalentes. Foi pedido a mostrar exemplos.
- Exemplo: converge em média mas não converge ponto a ponto

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- Sua série de Fourier é

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n+1)x]}{2n+1}$$

- Que converge para

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \neq f(x)$$

Convergência pontual, mas não em média

- Convergência em média e convergência ponto a ponto não são equivalentes. Foi pedido que mostrar exemplos.
- Veremos em breve um exemplo que converge em ponto a ponto mas não converge em média

Convergência uniforme

- Suponha que tenhamos uma soma parcial de funções (com n termos) da variável (real) x:

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x)$$

- A soma dessa série completa seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \equiv s(x) \equiv \lim_{n\to\infty} s_n(x)$
- Vamos ver agora a idéia de convergência uniforme, que é mais forte de convergência ponto a ponto.

Definição (Convergência uniforme)

Se, para todo $\epsilon > 0$ existe um número N, independente de x, no intervalo $a \leq x \leq b$ de tal forma que

$$|s(x) - s_n(x)| < \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

dizemos que a série é uniformemente convergente no intervalo $[a, b]$.

Convergência uniforme

- Suponha que tenhamos uma soma parcial de funções (com n termos) da variável (real) x:

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x)$$

- A soma dessa série completa seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \equiv s(x) \equiv \lim_{n\to\infty} s_n(x)$
- Vamos ver agora a idéia de convergência uniforme, que é mais forte de convergência ponto a ponto.

Definição (Convergência uniforme)

Se, para todo $\epsilon > 0$ existe um número N, independente de x, no intervalo $a \leq x \leq b$ de tal forma que

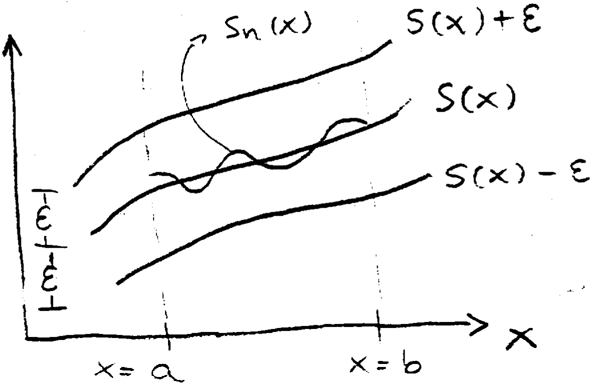
$$|s(x) - s_n(x)| < \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

dizemos que a série é uniformemente convergente no intervalo $[a, b]$.

Convergência uniforme

Definição (Convergência uniforme)

Se, para todo $\epsilon > 0$ existe um número N, independente de x, no intervalo $a \le x \le b$ de tal forma que $|s(x) - s_n(x)| < \epsilon, \quad \forall n \ge N$, dizemos que a série é uniformemente convergente no intervalo $[a, b]$.



Exemplo

$$s_n(x) = \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x}{[(\ell-1)x+1]\,[\ell x+1]} = \frac{nx}{1+nx}$$

(pode provar por indução matemática)

Note que

$$s_n(0) = 0, \quad \forall n \implies s(0) \equiv \lim_{n\to\infty} s_n(0) = 0$$

$$s(x \neq 0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x \neq 0) = 1$$

Logo, a série converge ponto a ponto para

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo

$$s_n(x) = \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x}{[(\ell-1)x+1][\ell x+1]} = \frac{nx}{1+nx}$$

(pode provar por indução matemática)

Note que

$$s_n(0) = 0, \quad \forall n \implies s(0) \equiv \lim_{n\to\infty} s_n(0) = 0$$

$$s(x \neq 0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x \neq 0) = 1$$

Logo, a série converge ponto a ponto para

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo

$$s_n(x) = \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x}{[(\ell-1)x+1]\,[\ell x+1]} = \frac{nx}{1+nx}$$

(pode provar por indução matemática)

Note que

$$s_n(0) = 0, \quad \forall n \implies s(0) \equiv \lim_{n\to\infty} s_n(0) = 0$$

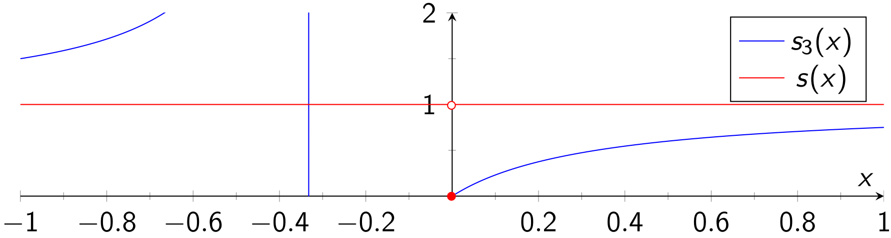
$$s(x \neq 0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x \neq 0) = 1$$

Logo, a série converge ponto a ponto para

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo

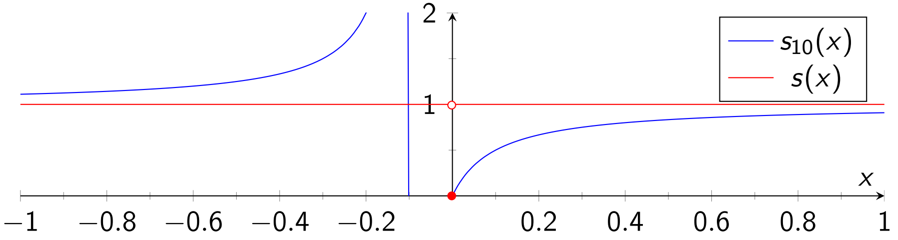
$$s_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$



- Para n fixo, tem um polo num valor de x, $x_0 = -1/n$, $\Longrightarrow$ $|s(x_0) - s_n(x_0)| \to \infty$, $\Longrightarrow$ não converge uniformemente para qualquer intervalo que inclua $x = 0$.
- Mesmo para interval $0 \leq x \leq 1$, toda $s_n(x)$ é contínua, enquanto $s(x)$ é descontínua $\Longrightarrow$ não converge uniformemente

Exemplo

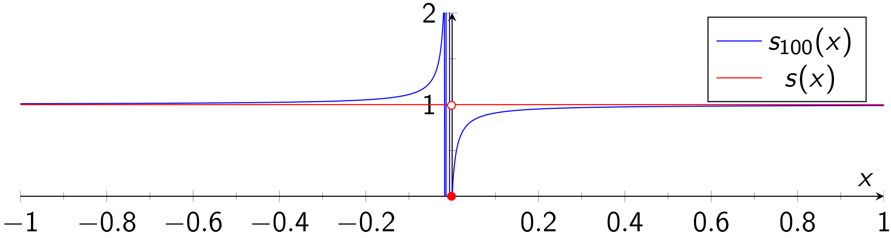
$$s_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$$



- Para n fixo, tem um polo num valor de x, $x_0 = -1/n$, $\implies |s(x_0) - s_n(x_0)| \to \infty$, $\implies$ não converge uniformemente para qualquer intervalo que inclua $x = 0$.
- Mesmo para interval $0 \leq x \leq 1$, toda $s_n(x)$ é contínua, enquanto $s(x)$ é descontínua $\implies$ não converge uniformemente

Exemplo

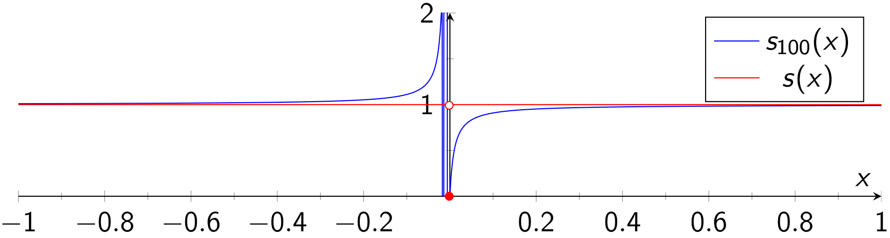
$$s_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$$



- Para n fixo, tem um polo num valor de x, $x_0 = -1/n$, $\implies |s(x_0) - s_n(x_0)| \to \infty$, $\implies$ não converge uniformemente para qualquer intervalo que inclua $x = 0$.
- Mesmo para interval $0 \leq x \leq 1$, toda $s_n(x)$ é contínua, enquanto $s(x)$ é descontínua $\implies$ não converge uniformemente

Exemplo

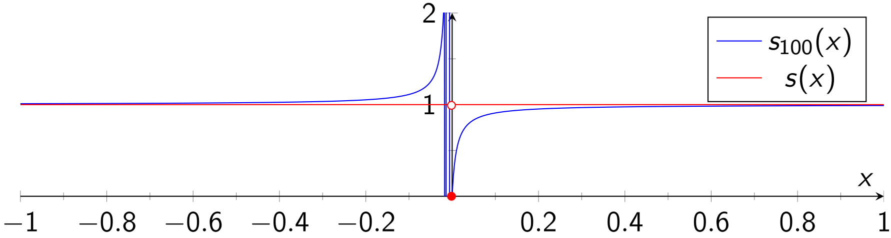
$$s_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$



- Para n fixo, tem um polo num valor de x, $x_0 = -1/n$, $\implies |s(x_0) - s_n(x_0)| \to \infty$, $\implies$ não converge uniformemente para qualquer intervalo que inclua $x = 0$.
- Mesmo para interval $0 \le x \le 1$, toda $s_n(x)$ é contínua, enquanto $s(x)$ é descontínua $\implies$ não converge uniformemente

Exemplo

$$s_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$



- Para n fixo, tem um polo num valor de x, $x_0 = -1/n$, $\Longrightarrow |s(x_0) - s_n(x_0)| \to \infty$, $\Longrightarrow$ não converge uniformemente para qualquer intervalo que inclua $x = 0$.
- Mesmo para interval $0 \leq x \leq 1$, toda $s_n(x)$ é contínua, enquanto $s(x)$ é descontínua $\Longrightarrow$ não converge uniformemente

Exemplo

$$s_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

- Nem converge em média, pois $(s(x_0) - s_n(x_0))^2$ não é integrável

$$D_n \equiv \int_a^b dx\, [s(x) - s_n(x)]^2 \to \infty$$

quando $a \leq x_0 \leq b$.

Teste M de Weierstrass

- Existem vários testes de convergência de séries.
- Para estudar convergência uniforme, o mais comum é o test M de Weierstrass
- Basicamente, isso funciona dessa forma:
  Se pudermos construir uma série *convergente* de números $\sum_{i=1} M_i$ onde $M_i \geq |u_i(x)|$, $\forall x$ no intervalo $[a, b]$,
  a série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ será uniformemente convergente em $[a, b]$.
- Prova:
  Se $\sum_{i=1} M_i$ converge, existe um número N tal que para $n+1 \geq N$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \epsilon$$

$$\implies \sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$$

e dessa forma

Teste M de Weierstrass

- Existem vários testes de convergência de séries.
- Para estudar convergência uniforme, o mais comum é o test M de Weierstrass
- Basicamente, isso funciona dessa forma:
  Se pudermos construir uma série *convergente* de números $\sum_{i=1} M_i$ onde $M_i \geq |u_i(x)|$, $\forall x$ no intervalo $[a, b]$,
  a série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ será uniformemente convergente em $[a, b]$.
- Prova:
  Se $\sum_{i=1} M_i$ converge, existe um número N tal que para $n + 1 \geq N$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \epsilon$$

$$\implies \sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$$

e dessa forma

Teste M de Weierstrass

- Basicamente, isso funciona dessa forma:
  Se pudermos construir uma série *convergente* de números $\sum_{i=1} M_i$ onde $M_i \geq |u_i(x)|, \; \forall x$ no intervalo $[a, b]$,
  a série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ será uniformemente convergente em $[a, b]$.
- Prova:
  Se $\sum_{i=1} M_i$ converge, existe um número N tal que para $n + 1 \geq N$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \epsilon$$

$$\implies \sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$$

e dessa forma

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x) \right| < \epsilon$$

e $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ é uniformemente convergente em $[a, b]$.

Teste M de Weierstrass

- Note que, por esse teste, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ também converge *absolutamente*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i(x)| = \text{finita}$$

- Porém, as propriedades são independentes, e a test M é uma condição suficiente, mas não necessário. O seja:

$$\begin{aligned}
\text{teste M} &\implies \text{convergência uniforme} \\
\text{teste M} &\implies \text{convergência absoluta} \\
\text{convergência uniforme} &\not\Longrightarrow \text{teste M} \\
\text{convergência absoluta} &\not\Longrightarrow \text{teste M} \\
\text{convergência uniforme} &\not\Longrightarrow \text{convergência absoluta} \\
\text{convergência absoluta} &\not\Longrightarrow \text{convergência uniforme}
\end{aligned}$$

Teste M de Weierstrass

Séries uniformemente convergentes possuem as propriedades:

1. Se $u_n(x)$ são contínuas, a soma da série
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$
também é contínua
2. Se $u_n(x)$ são contínuas, a série pode ser integrado termo a termo.
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b dx\, u_n(x)$$
(podemos comutar $\int$ e $\sum$.)
3. A derivada da soma da série $f(x)$ é igual a derivada dos termos individuais
$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x)$$

Teste M de Weierstrass

Séries uniformemente convergentes possuem as propriedades:

- Se
  1. $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ é uniformemente convergente em $[a, b]$
  2. $u_n(x)$ e $\frac{du_n}{dx}(x)$ são contínuos em $[a, b]$

  então

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dx}(x)$$

  é uniformemente convergente em $[a, b]$.
- Note que, como sempre, integração é muito mais simples que derivadas.

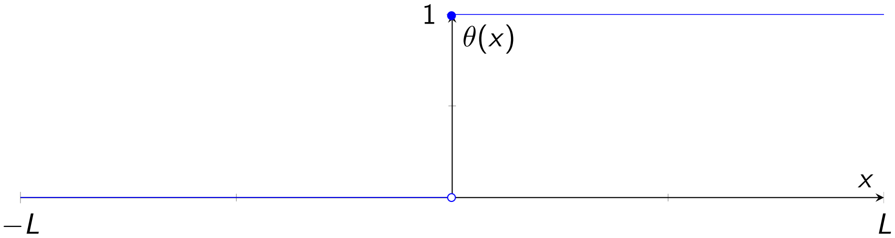
Resumo

Convergência

- Ponto a ponto: $\lim_{n\to\infty}[f(x) - f_n(x)] = 0, \quad \forall x \in [a,b]$
- Em média: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 = 0$
- Uniforme: $\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a,b]}|f(x) - f_n(x)| = 0$

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

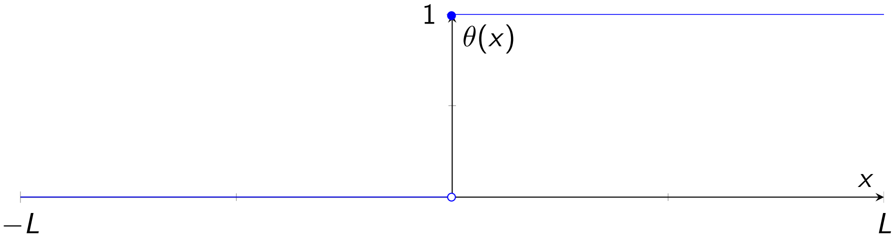


Qual a representação dessa função (com período $2L$) via série de Fourier?

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\theta(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} dx\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta_{n,0}$$

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

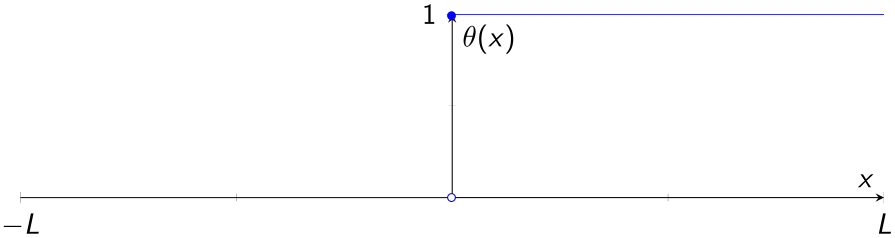


Qual a representação dessa função (com período $2L$) via série de Fourier?

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\theta(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} dx\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta_{n,0}$$

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

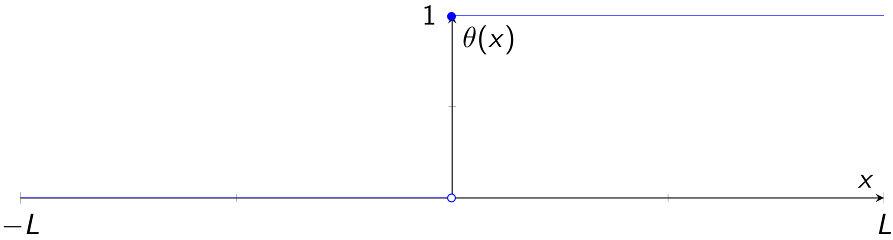


Qual a representação dessa função (com período $2L$) via série de Fourier?

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\theta(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} dx\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta_{n,0}$$

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

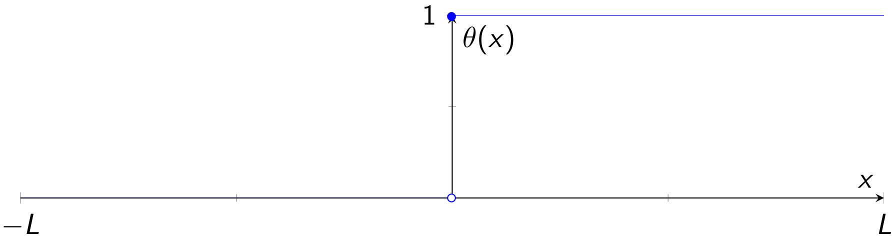


$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\theta(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{-1}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2p,\ \ p = 0, 1, \ldots \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{se } n = 2p+1 \end{cases}$$

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

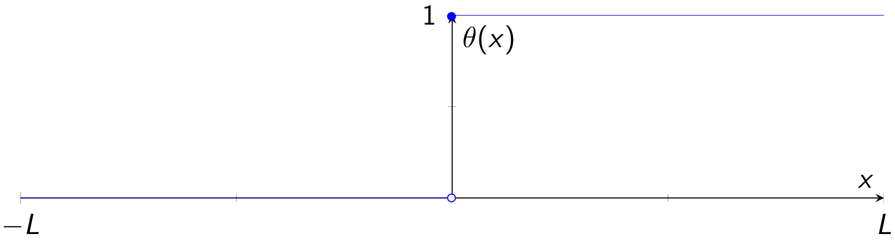


$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\theta(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{L}\int_0^L dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{-1}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2p, \ \ p = 0, 1, \ldots \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{se } n = 2p+1 \end{cases}$$

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

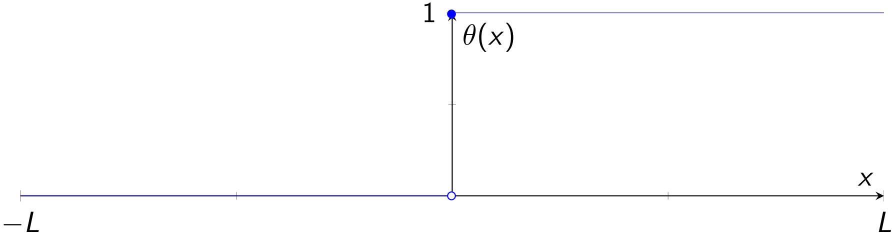


$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\theta(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{-1}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2p, \;\; p = 0, 1, \ldots \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{se } n = 2p + 1 \end{cases}$$

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

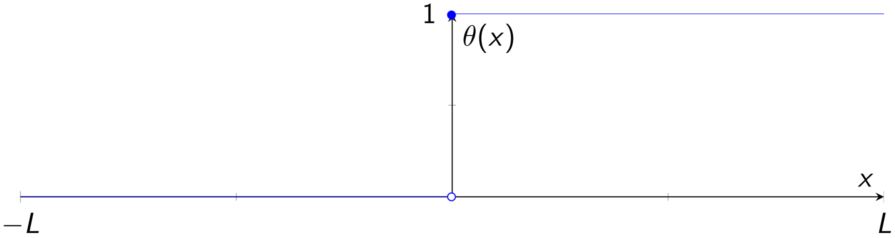


$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\theta(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{-1}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2p, \ \ p = 0, 1, \ldots \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{se } n = 2p+1 \end{cases}$$

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$



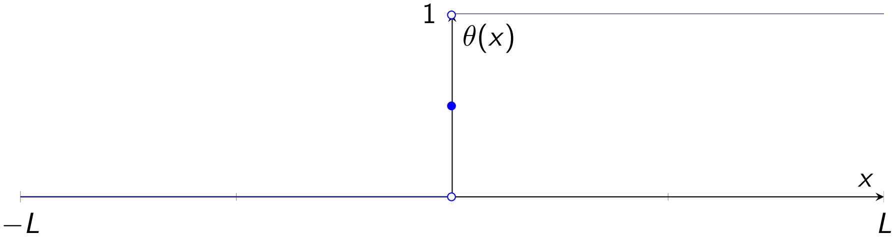
Assim, $\theta(z) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right]$

Note que a representação de $\theta(x)$ via Fourier dá $\theta_{\text{Fourier}}(0) = \frac{1}{2}$.

Essa função vai aparecer quando falarmos da delta de Dirac.

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$



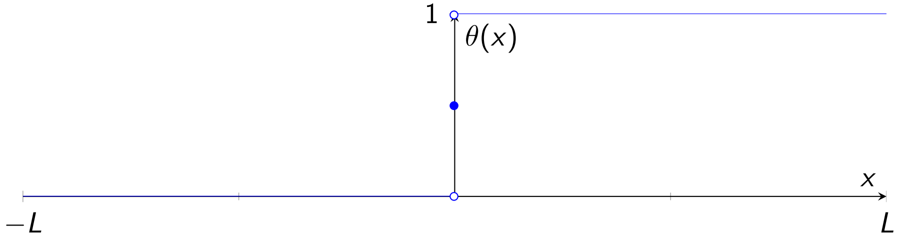
Assim, $\theta(z) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \,\text{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right]$

Note que a representação de $\theta(x)$ via Fourier dá $\theta_{\text{Fourier}}(0) = \frac{1}{2}$.

Essa função vai aparecer quando falarmos da delta de Dirac.

Função theta de Heaviside

Considere a função, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Assim, $\theta(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right]$

Note que a representação de $\theta(x)$ via Fourier dá $\theta_{\text{Fourier}}(0) = \frac{1}{2}$.

Essa função vai aparecer quando falarmos da delta de Dirac.