Séries de Fourier (aula 3)

Lembrete

- Uma função pode ser representada por sua série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

com coeficientes

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\ f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\ f(x) \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Taxa de convergência

- Lembre-se o exemplo da função descontínua $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- A série de Fourier era

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$$

- É semelhante à *série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge!
- $\implies$ convergência é bem lenta.
- O fato de que $a_n \sim \frac{1}{n}$ geralmente ocorre quando a função tem descontinuidades.
- Se $f(x)$ é contínua (mas talvez com derivadas descontínuas), geralmente o n-ésimo coeficiente $\sim \frac{1}{n^2}$ (convergência é muito mais rápida). (Lembre-se o exemplo, $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$

Taxa de convergência

- Lembre-se o exemplo da função descontínua $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- A série de Fourier era

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$$

- É semelhante à *série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge!
- $\implies$ convergência é bem lenta.
- O fato de que $a_n \sim \frac{1}{n}$ geralmente ocorre quando a função tem descontinuidades.
- Se $f(x)$ é contínua (mas talvez com derivadas descontínuas), geralmente o n-ésimo coeficiente $\sim \frac{1}{n^2}$ (convergência é muito mais rápida). (Lembre-se o exemplo, $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$

Taxa de convergência

- Lembre-se o exemplo da função descontínua $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- A série de Fourier era

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$$

- É semelhante à *série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge!
- $\implies$ convergência é bem lenta.
- O fato de que $a_n \sim \frac{1}{n}$ geralmente ocorre quando a função tem descontinuidades.
- Se $f(x)$ é contínua (mas talvez com derivadas descontínuas), geralmente o n-ésimo coeficiente $\sim \frac{1}{n^2}$ (convergência é muito mais rápida). (Lembre-se o exemplo, $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$

Taxa de convergência

- Lembre-se o exemplo da função descontínua $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- A série de Fourier era

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$$

- É semelhante à *série harmônica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge!
- $\implies$ convergência é bem lenta.
- O fato de que $a_n \sim \frac{1}{n}$ geralmente ocorre quando a função tem descontinuidades.
- Se $f(x)$ é contínua (mas talvez com derivadas descontínuas), geralmente o n-ésimo coeficiente $\sim \frac{1}{n^2}$ (convergência é muito mais rápida). (Lembre-se o exemplo, $f(x) = x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$

Taxa de convergência

- Lembre-se o exemplo da função descontínua $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- A série de Fourier era

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$$

- É semelhante à *série harmônica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge!
- $\implies$ convergência é bem lenta.
- O fato de que $a_n \sim \frac{1}{n}$ geralmente ocorre quando a função tem descontinuidades.
- Se $f(x)$ é contínua (mas talvez com derivadas descontínuas), geralmente o n-ésimo coeficiente $\sim \frac{1}{n^2}$ (convergência é muito mais rápida). (Lembre-se o exemplo, $f(x) = x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$

Integração da série de fourier

- Se a série de Fourier de $f(x)$ converge podemos fazer a integral termo a termo (i.e., trocar $\int\sum \to \sum\int$).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}(nx)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x}) = a_0 \frac{\tilde{x}}{2}\Big|_{x_0}^{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \,\mathrm{sen}\, n\tilde{x}\Big|_{x_0}^{x} - \frac{b_n}{n} \cos n\tilde{x}\Big|_{x_0}^{x} \right]$$

- Note que a integral da série, em geral, convergirá mais rápido do que a série original devido ao fator extra $\sim \frac{1}{n}$ que vem da integração de $\cos nx$ e $\mathrm{sen}\, nx$.

Derivada da série de fourier

- Integração melhora propriedades de convergência
- Derivadas pioram a convergência
- Exemplo: $f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen } nx}{n}$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 1 = 2\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen } nx}{n}$$

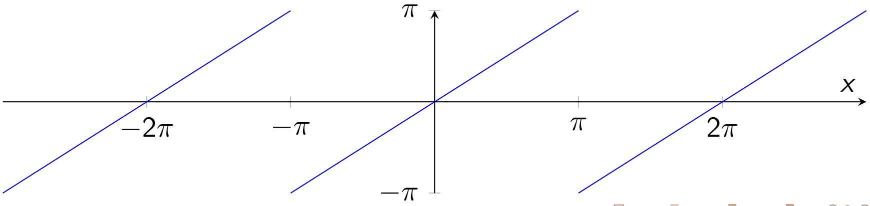
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx$$

Derivada da série de fourier

- Integração melhora propriedades de convergência
- Derivadas pioram a convergência
- Exemplo: $f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen}\, nx}{n}$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 1 = 2\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen}\, nx}{n}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx$$



Derivada da série de fourier

- Integração melhora propriedades de convergência
- Derivadas pioram a convergência
- Exemplo: $f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen } nx}{n}$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 1 = 2\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen } nx}{n}$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx$$

- A série não é convergente!
- Caso a série original converge mais rapidamente, tudo está OK.
- Exemplo: onda triangular

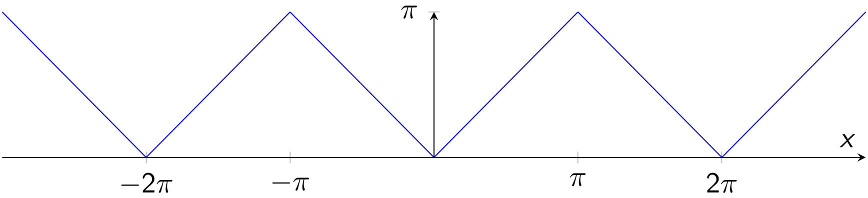
Derivada da série de fourier

- Integração melhora propriedades de convergência
- Derivadas pioram a convergência
- Exemplo: $f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen}\, nx}{n}$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 1 = 2\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen}\, nx}{n}$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx$$

- A série não é convergente!
- Caso a série original converge mais rapidamente, tudo está OK.
- Exemplo: onda triangular

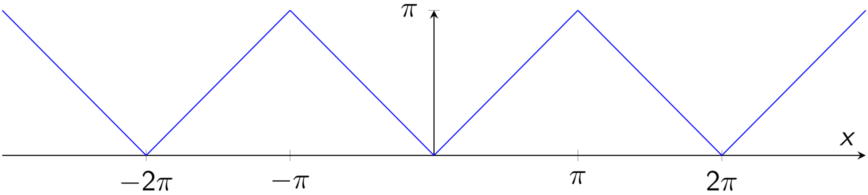
Derivada da série de fourier



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[(2n+1)\,x\right]}{2n+1}$$

Derivada da série de fourier

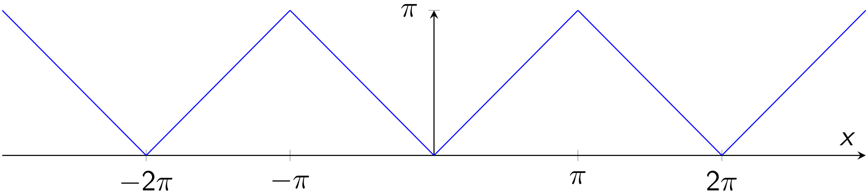


$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\left[(2n+1)\,x\right]}{2n+1}$$

A série de Fourier só tem cosenos (por que?)

Derivada da série de fourier

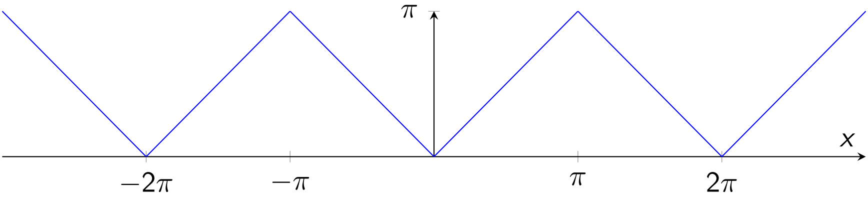


$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[(2n+1)\,x\right]}{2n+1}$$

A série de Fourier só tem cosenos (por que?)

Derivada da série de fourier

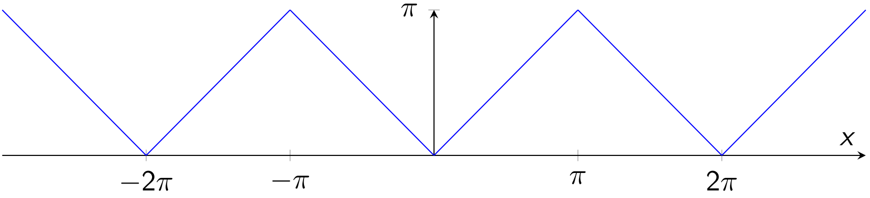


$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left[(2n+1)\,x\right]}{2n+1}$$

que é exatamente a série de Fourier que calculamos anteriormente

Derivada da série de fourier

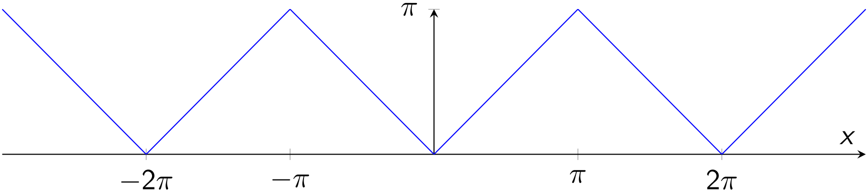


$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left[(2n+1)\,x\right]}{2n+1}$$

Nesse caso tudo ficou OK pois a série $\sim \frac{1}{n^2} \implies$ a derivada $\sim \frac{1}{n}$

Derivada da série de fourier



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\cos\left[(2n+1)\,x\right]}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left[(2n+1)\,x\right]}{2n+1}$$

Em geral, por cause do fator $\sim n$, a rapidez da convergência diminue bastante e, as vezes, transformar a série divergente

Convergência pontual

- Lembrete de algumas noções de convergência:

Definição 1 (Convergência ponto a ponto)

Uma sequência de funções $\{f_n(x)\}$ converge para uma função $f(x)$ ponto a ponto num intervalo $a \leq x \leq b$ se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{em } a \leq x \leq b$$

- No caso da série de Fourier, definimos cada função na sequência como a soma parcial

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]$$

- A série de Fourier de uma função *muito suave*, por exemplo, converge ponto a ponto.
- Não acontece em geral. A série pode converge *em média*.

Convergência em média

- Vamos lembrar um pouco de Física experimental I:
  $\{y_i\}$ = conjunto de dados experimentais.
  Quão bem uma curva téorica $\{\bar{y}_i\}$ representa os dados?
- *Desvio médio quadrado:* para uma sequência de n pontos experimentais

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 \qquad \geq 0$$

- Versão contínua: Define agora $L \equiv b - a$
  e divida em subintervalos $n \equiv \frac{L}{\Delta x}$.
  Tome $\Delta x \to 0$, $n \to \infty \implies L$ finito $\neq 0$.

$$D = \frac{1}{L}\int_a^b dx\,[y(x) - \bar{y}(x)]^2 \qquad \geq 0$$

Convergência em média

- Vamos lembrar um pouco de Física experimental I:
  $\{y_i\}$ = conjunto de dados experimentais.
  Quão bem uma curva téorica $\{\bar{y}_i\}$ representa os dados?
- *Desvio médio quadrado:* para uma sequência de n pontos experimentais

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 \qquad \geq 0$$

- Versão contínua: Define agora $L \equiv b - a$
  e divida em subintervalos $n \equiv \frac{L}{\Delta x}$.
  Tome $\Delta x \to 0$, $n \to \infty \implies L$ finito $\neq 0$.

$$D = \frac{1}{L}\int_a^b dx\, [y(x) - \bar{y}(x)]^2 \qquad \geq 0$$

Convergência em média

- Vamos lembrar um pouco de Física experimental I:
  $\{y_i\}$ = conjunto de dados experimentais.
  Quão bem uma curva téorica $\{\bar{y}_i\}$ representa os dados?
- *Desvio médio quadrado:* para uma sequência de n pontos experimentais

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2 \qquad \geq 0$$

- Versão contínua: Define agora $L \equiv b - a$
  e divida em subintervalos $n \equiv \frac{L}{\Delta x}$.
  Tome $\Delta x \to 0$, $n \to \infty \implies L$ finito $\neq 0$.

$$D = \frac{1}{L} \int_a^b dx \, [y(x) - \bar{y}(x)]^2 \qquad \geq 0$$

Convergência em média

- Vamos lembrar um pouco de Física experimental I:
  $\{y_i\}$ = conjunto de dados experimentais.
  Quão bem uma curva téorica $\{\bar{y}_i\}$ representa os dados?
- *Desvio médio quadrado:* para uma sequência de n pontos experimentais
$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 \qquad \geq 0$$
- Versão contínua: Define agora $L \equiv b - a$
  e divida em subintervalos $n \equiv \frac{L}{\Delta x}$.
  Tome $\Delta x \to 0$, $n \to \infty \implies L$ finito $\neq 0$.
$$D = \frac{1}{L}\int_a^b dx\,[y(x) - \bar{y}(x)]^2 \qquad \geq 0$$

Convergência em média

- Vamos lembrar um pouco de Física experimental I:
  $\{y_i\}$ = conjunto de dados experimentais.
  Quão bem uma curva téorica $\{\bar{y}_i\}$ representa os dados?
- *Desvio médio quadrado:* para uma sequência de n pontos experimentais

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 \qquad \geq 0$$

- Versão contínua: Define agora $L \equiv b - a$
  e divida em subintervalos $n \equiv \frac{L}{\Delta x}$.
  Tome $\Delta x \to 0$, $n \to \infty \implies L$ finito $\neq 0$.
  Assim podemos definir o desvio quadrado de duas funções $f(x)$ e $g(x)$

$$D = \int_a^b dx\,[f(x) - g(x)]^2$$

É uma medida da diferença entre $f(x)$ e $g(x)$.

Convergência em média

- Seguindo essa ideia, dizemos que

Definição 2 (Convergência em média)

Uma dada sequência de funções $\{f_n(x)\}$ *converge em média para uma outra função* $f(x)$ *num intervalo* $[a, b]$ *se:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 \, dx = 0,$$

- Note que convergência ponto a ponto definida via

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

não necessariamente implica em convergência em média. Analogomente, convergência em média não implica em convergência ponto a ponto.

- Esses conceitos são equivalentes somente se podermos comutar $\lim\limits_{n\to\infty}$ com a $\int_a^b$ (o que não é sempre possível).

Minimização do desvio quadrado

- Suponha que tenhamos uma $f(x)$ dada em $x \in [-\pi, \pi]$ e que queremos aproximar $f(x)$ pela série trigonométrica com um número n (finito) de termos (assume que converge)

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)$$

onde A_k e B_k não são a priori conhecidos.

- Podemos obter A_k e B_k de forma que o desvio quadrado D entre $f(x)$ e $g_n(x)$ seja mínimo para $x \in [-\pi, \pi]$.

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, [f(x) - g_n(x)]^2 \qquad \rightarrow \text{ mínimo}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx\, [f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x)]$$

Minimização do desvio quadrado

- Suponha que tenhamos uma $f(x)$ dada em $x \in [-\pi, \pi]$ e que queremos aproximar $f(x)$ pela série trigonométrica com um número n (finito) de termos (assume que converge)

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \,\text{sen}\, kx)$$

onde A_k e B_k não são a priori conhecidos.

- Podemos obter A_k e B_k de forma que o desvio quadrado D entre $f(x)$ e $g_n(x)$ seja mínimo para $x \in [-\pi, \pi]$.

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, [f(x) - g_n(x)]^2 \qquad \rightarrow \text{ mínimo}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x) \right]$$

Minimização do desvio quadrado

- Suponha que tenhamos uma $f(x)$ dada em $x \in [-\pi, \pi]$ e que queremos aproximar $f(x)$ pela série trigonométrica com um número n (finito) de termos (assume que converge)

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)$$

onde A_k e B_k não são a priori conhecidos.

- Podemos obter A_k e B_k de forma que o desvio quadrado D entre $f(x)$ e $g_n(x)$ seja mínimo para $x \in [-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned} D_n &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \, [f(x) - g_n(x)]^2 \qquad \rightarrow \; \text{mínimo} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x) \right] \end{aligned}$$

Minimização do desvio quadrado

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) g_n(x)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{A_0}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} B_k f(x) \operatorname{sen} kx$$

$$= \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx + \sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} kx$$

Minimização do desvio quadrado

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x) \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) g_n(x)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{A_0}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} B_k f(x) \operatorname{sen} kx$$

$$= \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx + \sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} kx$$

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x) \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) g_n(x)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{A_0}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} B_k f(x) \operatorname{sen} kx$$

$$= \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx + \sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} kx$$

Minimização do desvio quadrado

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x) \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) g_n(x)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{A_0}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} B_k f(x) \operatorname{sen} kx$$

$$= \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx + \sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} kx$$

Minimização do desvio quadrado

$$g_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \,\mathrm{sen}\, kx)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) g_n(x)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{A_0}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} B_k f(x) \,\mathrm{sen}\, kx$$

$$= \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx + \sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \,\mathrm{sen}\, kx$$

Minimização do desvio quadrado

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx g_n^2(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos kx + B_k \,\mathrm{sen}\, kx\right)\right] \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos kx + B_k \,\mathrm{sen}\, kx\right)\right]$$

$$= \frac{A_0^2}{4} 2\pi + 2\frac{A_0}{2}\left[\sum_{\ell=1}^{n}\left(A_\ell \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos \ell x} + B_\ell \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\mathrm{sen}\, \ell x}\right)\right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} A_k A_\ell \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos \ell x}_{\pi\delta_{k\ell}} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} B_k B_\ell \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\mathrm{sen}\, kx \,\mathrm{sen}\, \ell x}_{\pi\delta_{k\ell}}$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} A_k B_\ell \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \,\mathrm{sen}\, \ell x}$$

Minimização do desvio quadrado

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx g_n^2(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)\right]$$
$$\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)\right]$$
$$= \frac{A_0^2}{4} 2\pi + 2\frac{A_0}{2}\left[\sum_{\ell=1}^{n}\left(A_\ell \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos \ell x} + B_\ell \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} \ell x}\right)\right]$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} A_k A_\ell \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos \ell x}_{\pi\delta_{k\ell}} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} B_k B_\ell \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \ell x}_{\pi\delta_{k\ell}}$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} A_k B_\ell \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \operatorname{sen} \ell x}$$

Minimização do desvio quadrado

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx g_n^2(x) = \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left[A_k A_\ell \delta_{k\ell} + B_k B_\ell \delta_{k\ell}\right]$$

$$= \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x)\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\cos kx$$

$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\,\mathrm{sen}\, kx + \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

Minimização do desvio quadrado

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx g_n^2(x) = \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [A_k A_\ell \delta_{k\ell} + B_k B_\ell \delta_{k\ell}]$$

$$= \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x)\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$

$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} kx + \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

Minimização do desvio quadrado

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx g_n^2(x) = \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [A_k A_\ell \delta_{k\ell} + B_k B_\ell \delta_{k\ell}]$$
$$= \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[f(x)^2 - 2f(x)g_n(x) + g_n^2(x)\right]$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \,\mathrm{sen}\, kx + \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \,\mathrm{sen}\, kx + \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} (A_k^2 + B_k^2)$$

- Vamos agora minimizar D_n com relação aos A_k, B_k. $D_n = D_n(A_k, B_k)$ e assim, no mínimo $\dfrac{\partial D_n}{\partial A_k} = \dfrac{\partial D_n}{\partial B_k} = 0$

$$\frac{\partial D_n}{\partial A_0} = -\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) + A_0\pi = 0$$
$$\implies A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x).$$

Esse é o valor de A_0 que minimiza D_n.

Minimização do desvio quadrado

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \,\text{sen}\, kx + \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

- Vamos agora minimizar D_n com relação aos A_k, B_k. $D_n = D_n(A_k, B_k)$ e assim, no mínimo $\frac{\partial D_n}{\partial A_k} = \frac{\partial D_n}{\partial B_k} = 0$

$$\frac{\partial D_n}{\partial A_0} = -\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) + A_0 \pi = 0$$
$$\implies A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x).$$

Esse é o valor de A_0 que minimiza D_n.

Minimização do desvio quadrado

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \,\text{sen}\, kx + \frac{A_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

- Para $\ell > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_n}{\partial A_\ell} &= 0 \\ &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos \ell x + 2 A_\ell \pi \end{aligned}$$
$$\implies A_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos \ell x.$$

Os valores dos coeficientes A_k e B_k que minimizam D_n são exatamente aquelas expressões vinda da série de Fourier!

Minimização do desvio quadrado

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} kx + \frac{A_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

- Para $\ell > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_n}{\partial B_\ell} &= 0 \\ &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} \ell x + 2 B_\ell \pi \end{aligned}$$
$$\Longrightarrow \quad B_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} \ell x.$$

Os valores dos coeficientes A_k e B_k que minimizam D_n são exatamente aquelas expressões vinda da série de Fourier!

Minimização do desvio quadrado

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} kx + \frac{A_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

- Para $\ell > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_n}{\partial B_\ell} &= 0 \\ &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} \ell x + 2 B_\ell \pi \\ \implies B_\ell &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} \ell x. \end{aligned}$$

Os valores dos coeficientes A_k e B_k que minimizam D_n são exatamente aquelas expressões vinda da série de Fourier!

Minimização do desvio quadrado

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \,\text{sen}\, kx + \frac{A_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

- Note que temos um *mínimo* (e não máximo ou ponta de sela) pois

$$\frac{\partial^2 D_n}{\partial A_\ell^2} = \frac{\partial^2 D_n}{\partial B_\ell^2} = 2\pi > 0.$$

- Vamos substituir A_k e B_k no D_n

$$A_m = a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) \cos mx; \quad B_m = b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) \,\text{sen}\, mx,$$

$$D_n\Big|_{\min} = \int^{\pi} dx f^2(x) - a_0(\pi a_0) - 2\sum^{n} a_k(\pi a_k) - 2\sum^{n} b_k(\pi b_k)$$

Minimização do desvio quadrado

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \,\text{sen}\, kx + \frac{A_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

- Vamos substituir A_k e B_k no D_n

$$A_m = a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) \cos mx; \quad B_m = b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) \,\text{sen}\, mx,$$

$$D_n\Big|_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - a_0(\pi a_0) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(\pi a_k) - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(\pi b_k)$$
$$+ \frac{a_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Minimização do desvio quadrado

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \operatorname{sen} kx + \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

- Vamos substituir A_k e B_k no D_n

$$A_m = a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\; f(x)\cos mx; \quad B_m = b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\; f(x) \operatorname{sen} mx,$$

$$D_n\Big|_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - a_0(\pi a_0) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(\pi a_k) - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(\pi b_k)$$
$$+ \frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Minimização do desvio quadrado

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos kx$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \,\mathrm{sen}\, kx + \frac{A_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(A_k^2 + B_k^2\right)$$

$$D_n\Big|_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) - a_0(\pi a_0) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(\pi a_k) - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(\pi b_k)$$
$$+ \frac{a_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)^2 - \left[\frac{a_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

Desigualdade de Bessel

$$D_n\Big|_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)^2 - \left[\frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

- Note que por definição, $D_n \geq 0 \implies D_n\Big|_{\min} \geq 0$ e assim

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x)$$

- Agora, nesse ponto podemos tomar $n \to \infty$. A série trigonométrica com número de termos finito vira uma série de Fourier e assim

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x)$$

Essa é a desigualdade de Bessel

Desigualdade de Bessel

$$D_n\Big|_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)^2 - \left[\frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

- Note que por definição, $D_n \geq 0 \implies D_n\Big|_{\min} \geq 0$ e assim

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x)$$

- Agora, nesse ponto podemos tomar $n \to \infty$. A série trigonométrica com número de termos finito vira uma série de Fourier e assim

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x)$$

Essa é a desigualdade de Bessel

Relação de Parseval

$$D_n\Big|_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)^2 - \left[\frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

- A série de Fourier é considerada uma *representação fiel* (ou adequada) da função $f(x)$ se

$$\lim_{n\to\infty} D_n\Big|_{\min} = 0$$

o que equivale a dizer que converge em média pois

$$\lim_{n\to\infty} D_n\Big|_{\min} = 0 \implies \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - g_n^{\text{Fourier}}(x)\right]^2 = 0$$

Relação de Parseval

$$D_n\Big|_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)^2 - \left[\frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right] = 0$$

- Assim, se a série de Fourier de $f(x)$ convergir em média para $f(x)$, a desigualdade de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x)$$

se torna a famosa relação de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

onde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\cos kx; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\,\mathrm{sen}\, kx$$

Completeza de $\{\operatorname{sen} kx, \cos kx\}$

Dizemos que $\{\operatorname{sen} kx, \cos kx\}$ forma um conjunto completo em relação a uma dada classe de funções se a relação de Parsevel é satisfeita para essa classe de funções.

Teorema 1

O sistema $\{\operatorname{sen} kx, \cos kx\}$ *é completo para todas as funções contínuas por partes no intervalo* $x \in [-\pi, \pi]$.

Dimensão finita

- Note que existe algo similar a relação de Parseval para espaços vetoriais de dimensão finita.
- Defina $\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{e}_i$, onde $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$
- O produto escalar é definido por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \hat{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} b_k \hat{e}_k \right)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{N} a_i b_k \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i$$

- Agora $\quad \vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{k=1}^{N} a_k^2$

Dimensão finita

- Note que existe algo similar a relação de Parseval para espaços vetoriais de dimensão finita.
- Defina $\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{e}_i$, onde $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$
- O produto escalar é definido por

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \hat{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} b_k \hat{e}_k \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{N} a_i b_k \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i\end{aligned}$$

- Agora $\quad \vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{k=1}^{N} a_k^2$

Dimensão finita

Fazendo a analogia

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \to \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) g(x)$$

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{e}_i \to f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx]$$

Vemos que

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \to \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

(Note que a base $\{| \operatorname{sen} nx, \cos nx\}$ é ortogonal mas não ortonormal).