Física Matemática I

Informações importantes

- Site: `http://matt.luzum.org/Home/fmi2021`
- Prof. Matthew Luzum
- Avaliação: Exercícios (30%) + 2 provas (35% cada)
- Aulas: segundas 10h e quintas 8h
- Monitoria: segundas e quintas 13h

Série de Fourier

- Série trigonométrica ($x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

- Note:

$$0 \leq |\cos nx| \leq 1$$
$$0 \leq |\operatorname{sen} nx| \leq 1$$

- Existência e propriedades de $f(x)$?

Série de Fourier

- Série trigonométrica ($x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

- Note:

$$0 \leq |\cos nx| \leq 1$$
$$0 \leq |\operatorname{sen} nx| \leq 1$$

- Existência e propriedades de $f(x)$?

Série de Fourier

- Série trigonométrica ($x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

- Note:

$$0 \leq |a_n \cos nx| \leq |a_n|$$
$$0 \leq |b_n \operatorname{sen} nx| \leq |b_n|$$

- Existência e propriedades de $f(x)$?

Série de Fourier

- Série trigonométrica ($x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

- Note:

$$0 \leq |a_n \cos nx| \leq |a_n|$$
$$0 \leq |b_n \operatorname{sen} nx| \leq |b_n|$$

- Existência e propriedades de $f(x)$?

- Série trigonométrica ($x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}(nx)]$$

- Note:

$$0 \le |a_n \cos nx| \le |a_n|$$
$$0 \le |b_n \,\mathrm{sen}\, nx| \le |b_n|$$

- Existência e propriedades de $f(x)$?

Lembrete: Série de Taylor/Laurant

- Série de Taylor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
- $f(z)$ analítica em $z = 0 \implies$ série existe, única
- Função não analítica: série de Laurant: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$
- Quando existe, descreve *completamente* a função
- Não bem definida para funções *descontinuas*
- Fourier $\rightarrow$ séries trigonométricas

Lembrete: Série de Taylor/Laurant

- Série de Taylor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
- $f(z)$ analítica em $z = 0 \implies$ série existe, única
- Função não analítica: série de Laurant: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$
- Quando existe, descreve *completamente* a função
- Não bem definida para funções *descontinuas*
- Fourier $\rightarrow$ séries trigonométricas

Lembrete: Série de Taylor/Laurant

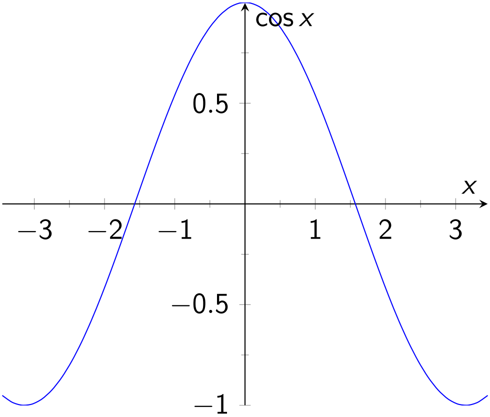
- Série de Taylor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
- $f(z)$ analítica em $z = 0 \implies$ série existe, única
- Função não analítica: série de Laurant: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$
- Quando existe, descreve *completamente* a função
- Não bem definida para funções *descontinuas*
- Fourier $\rightarrow$ séries trigonométricas

Lembrete: Série de Taylor/Laurant

- Série de Taylor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
- $f(z)$ analítica em $z = 0 \implies$ série existe, única
- Função não analítica: série de Laurant: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$
- Quando existe, descreve *completamente* a função
- Não bem definida para funções *descontinuas*
- Fourier $\rightarrow$ séries trigonométricas

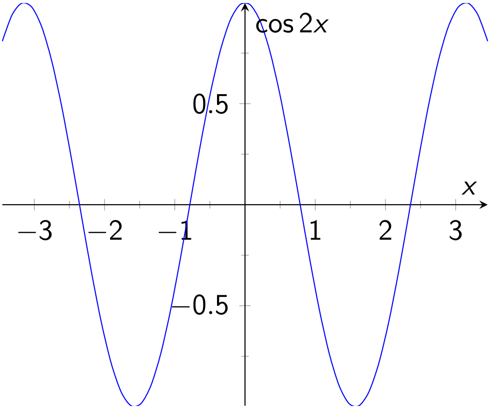
Propriedade 1: Periodicidade

- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$
- Séries trigonométricas descreve funções periódicas de período 2π e múltiplas (ou, funções num intervalo finito, dentro do período da série)



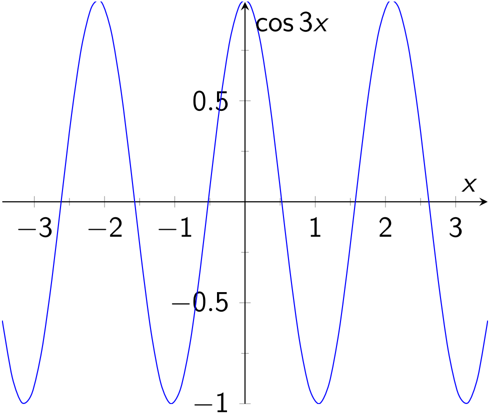
Propriedade 1: Periodicidade

- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$
- Séries trigonométricas descreve funções periódicas de período 2π e múltiplas (ou, funções num intervalo finito, dentro do período da série)



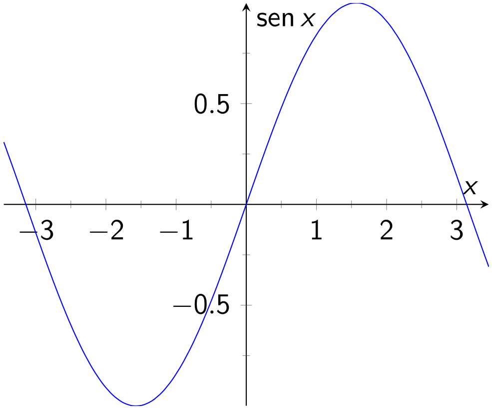
Propriedade 1: Periodicidade

- $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$
- Séries trigonométricas descreve funções periódicas de período 2π e múltiplas (ou, funções num intervalo finito, dentro do período da série)



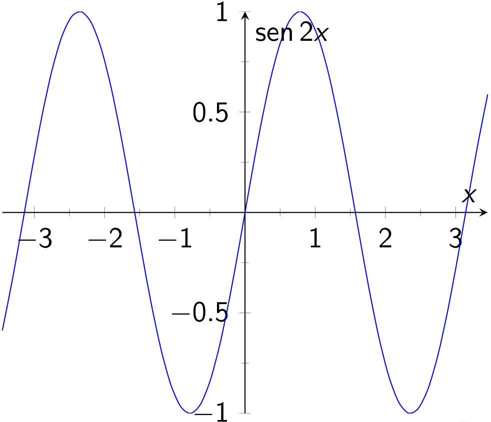
Propriedade 1: Periodicidade

- $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$
- Séries trigonométricas descreve funções periódicas de período 2π e múltiplas (ou, funções num intervalo finito, dentro do período da série)



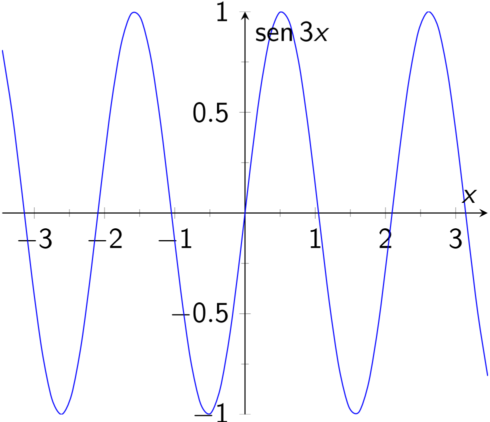
Propriedade 1: Periodicidade

- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$
- Séries trigonométricas descreve funções periódicas de período 2π e múltiplas (ou, funções num intervalo finito, dentro do período da série)



Propriedade 1: Periodicidade

- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$
- Séries trigonométricas descreve funções periódicas de período 2π e múltiplas (ou, funções num intervalo finito, dentro do período da série)



Existência

Condições *suficientes* (mas não *necessárias*) para que a série seja válida:

1. $f(x)$ possui apenas um número finito de descontinuidades finitas num período (i.e. no intervalo finito $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$)
2. $f(x)$ possui apenas um número finito de valores extremes, máximos, e mínimos, no intervalo.

"piecewise regular" ou "contínua/regular por pedaços" ou "seccionalmente contínua"

Mais precisamente, precisames das definições:

Existência

Condições *suficientes* (mas não *necessárias*) para que a série seja válida:

1. $f(x)$ possui apenas um número finito de descontinuidades finitas num período (i.e. no intervalo finito $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$)
2. $f(x)$ possui apenas um número finito de valores extremes, máximos, e mínimos, no intervalo.

"piecewise regular" ou "contínua/regular por pedaços" ou "seccionalmente contínua"

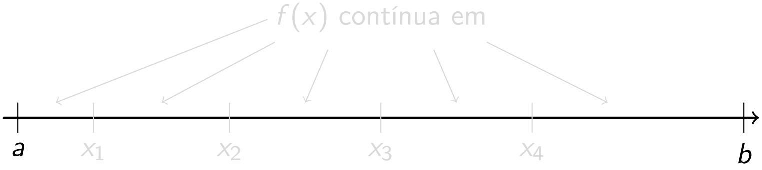
Mais precisamente, precisames das definições:

Função seccionalmente contínua

Definição 1 (Seccionalmente contínua)

Uma função definida num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ é seccionalmente contínua quando o intervalo pode ser dividido em um número finito de subintervalos tais que em cada subintervalo

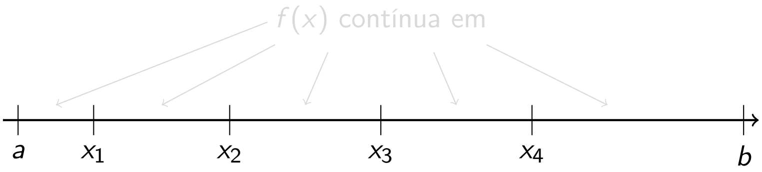
1. *$f(x)$ é contínua*
2. *$f(x)$ possui limites finitos nas extremidades esquerda e direita de cada subintervalo. Isso significa que $\lim_{\epsilon \to 0} f(b - \epsilon)$ existem.*



Definição 1 (Seccionalmente contínua)

Uma função definida num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ é seccionalmente contínua quando o intervalo pode ser dividido em um número finito de subintervalos tais que em cada subintervalo

1. *$f(x)$ é contínua*
2. *$f(x)$ possui limites finitos nas extremidades esquerda e direita de cada subintervalo. Isso significa que $\lim\limits_{\epsilon \to 0} f(b - \epsilon)$ existem.*

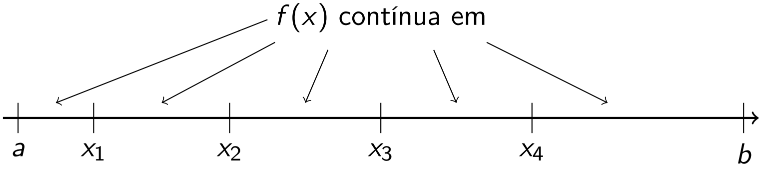


Função seccionalmente contínua

Definição 1 (Seccionalmente contínua)

Uma função definida num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ é seccionalmente contínua quando o intervalo pode ser dividido em um número finito de subintervalos tais que em cada subintervalo

1. *$f(x)$ é contínua*
2. *$f(x)$ possui limites finitos nas extremidades esquerda e direita de cada subintervalo. Isso significa que $\lim_{\epsilon \to 0} f(b - \epsilon)$ existem.*



Função seccionalmente contínua

Definição 1 (Seccionalmente contínua)

Uma função definida num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ é seccionalmente contínua quando o intervalo pode ser dividido em um número finito de subintervalos tais que em cada subintervalo

1. *$f(x)$ é contínua*
2. *$f(x)$ possui limites finitos nas extremidades esquerda e direita de cada subintervalo. Isso significa que $\lim_{\epsilon \to 0} f(b - \epsilon)$ existem.*

- $f(x)$ é *seccionalmente suave* se $f(x)$ é contínua por pedaços e $f'(x)$ também.
- Se $f(x)$, $f'(x)$, e $f''(x)$ são contínuas por pedaços, então $f(x)$ é "muito suave" por pedaços.

Função seccionalmente contínua

Definição 1 (Seccionalmente contínua)

Uma função definida num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ é seccionalmente contínua quando o intervalo pode ser dividido em um número finito de subintervalos tais que em cada subintervalo

1. $f(x)$ *é contínua*
2. $f(x)$ *possui limites finitos nas extremidades esquerda e direita de cada subintervalo. Isso significa que* $\lim_{\epsilon \to 0} f(b - \epsilon)$ *existem.*

- $f(x)$ é *seccionalmente suave* se $f(x)$ é contínua por pedaços e $f'(x)$ também.
- Se $f(x)$, $f'(x)$, e $f''(x)$ são contínuas por pedaços, então $f(x)$ é "muito suave" por pedaços.

Condições de Dirichlet

Definição 2 (Condições de Dirichlet)

Uma função definida num intervalo fechado $a \leq x \leq b$ satisfaz as condições de Dirichlet se

- $f(x)$ *é continua por pedaços*
- *O intervalo* (a, b) *pode ser dividido em um número finito de subintervalos onde* $f(x)$ *é monótona (i.e., crescente ou decrescente).*

Existência/convergencia

Teorema 1

Se $f(x)$ é muito suave por pedaços no intervalo $(-L, L)$ então sua série de Fourier converge para

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{1}{2}\left[f(x-\epsilon) + f(x+\epsilon)\right] & -L < x < L \\ \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{1}{2}\left[f(-L+\epsilon) + f(L-\epsilon)\right] & x = \pm L \end{cases}$$

Teorema 2

A afirmativa com relação dos limites no teorema 1 é verdadeira também se $f(x)$, ao invés de ser "muito suave" por pedaços, satisfaz a condições de Dirichlet no intervalo entre $-L \leq x \leq L$.

Completeza da base $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)\, e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)\, e^{-inx}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad \text{com } |z| = 1$$

onde para $n \geq 0$,

$$c_n \equiv \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} \equiv c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$$c_0 \equiv \frac{a_0}{2}$$

Completeza da base $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(a_n - i b_n \right) e^{inx} + \frac{1}{2} \left(a_n + i b_n \right) e^{-inx} \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad \text{com } |z| = 1
\end{aligned}
$$

onde para $n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
c_n &\equiv \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\
c_{-n} &\equiv c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \\
c_0 &\equiv \frac{a_0}{2}
\end{aligned}
$$

Completeza da base $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{inx} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) e^{-inx}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad \text{com } |z| = 1$$

onde para $n \geq 0$,

$$c_n \equiv \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} \equiv c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$$c_0 \equiv \frac{a_0}{2}$$

Completeza da base $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{inx} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) e^{-inx}\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad \text{com } |z| = 1
\end{aligned}
$$

onde para $n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
c_n &\equiv \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
c_{-n} &\equiv c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\
c_0 &\equiv \frac{a_0}{2}
\end{aligned}
$$

Completeza da base $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{inx} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) e^{-inx}\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad \text{com } |z| = 1
\end{aligned}
$$

onde para $n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
c_n &\equiv \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
c_{-n} \equiv c_n^* &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\
c_0 &\equiv \frac{a_0}{2}
\end{aligned}
$$

Completeza da base $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{inx} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) e^{-inx}\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad \text{com } |z| = 1
\end{aligned}
$$

onde para $n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
c_n &\equiv \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
c_{-n} \equiv c_n^* &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\
c_0 &\equiv \frac{a_0}{2}
\end{aligned}
$$

Completeza e ortogonalidade

- $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad (\text{com } |z| = 1).$
- $\implies$ como séries de Laurent, quando existe, é única
- $\implies$ conjunto completa ("base") de funções no intervalo $[-\pi, \pi]$ (veja téoria de Sturm-Liouville em FísMat II)
- Também são *funções ortogonais*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \,\text{sen}\, nx = \begin{cases} \pi\delta_{mn} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \begin{cases} \pi\delta_{mn} & m \neq 0 \\ 2\pi\delta_{mn} & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \cos nx = 0$$

- Vamos provar:

Completeza e ortogonalidade

- $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad (\text{com } |z| = 1).$
- $\implies$ como séries de Laurent, quando existe, é única
- $\implies$ conjunto completa ("base") de funções no intervalo $[-\pi, \pi]$ (veja téoria de Sturm-Liouville em FísMat II)
- Também são *funções ortogonais*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \,\text{sen}\, nx = \begin{cases} \pi\delta_{mn} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \begin{cases} \pi\delta_{mn} & m \neq 0 \\ 2\pi\delta_{mn} & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \cos nx = 0$$

- Vamos provar:

Completeza e ortogonalidade

- $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad (\text{com } |z| = 1).$
- $\implies$ como séries de Laurent, quando existe, é única
- $\implies$ conjunto completa ("base") de funções no intervalo $[-\pi, \pi]$ (veja téoria de Sturm-Liouville em FísMat II)
- Também são *funções ortogonais*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \,\text{sen}\, nx = \begin{cases} \pi\delta_{mn} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \begin{cases} \pi\delta_{mn} & m \neq 0 \\ 2\pi\delta_{mn} & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \cos nx = 0$$

- Vamos provar:

Simetria

- A terceira relação é verdade por simetria:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(nx) &= -\operatorname{sen}(-nx) \\ \cos(nx) &= \cos(-nx) \\ \implies \operatorname{sen} mx \cos nx &= -\operatorname{sen}(-mx)\cos(-nx) \end{aligned}$$

- Define outra valiável $x' = -x$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} mx \cos nx &= \int_{-\pi}^{0} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= \int_{0}^{\pi} dx' \operatorname{sen}(-mx')\cos(-nx') + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= -\int_{0}^{\pi} dx' \operatorname{sen}(mx')\cos(nx') + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Simetria

- A terceira relação é verdade por simetria:

$$\begin{aligned} \text{sen}(nx) &= -\,\text{sen}(-nx) \\ \cos(nx) &= \cos(-nx) \\ \implies \text{sen}\, mx \cos nx &= -\,\text{sen}(-mx)\cos(-nx) \end{aligned}$$

- Define outra valiável $x' = -x$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \text{sen}\, mx \cos nx = \int_{-\pi}^{0} dx\, \text{sen}(mx)\cos(nx) + \int_{0}^{\pi} dx\, \text{sen}(mx)\cos(nx)$$

$$= \int_{0}^{\pi} dx'\, \text{sen}(-mx')\cos(-nx') + \int_{0}^{\pi} dx\, \text{sen}(mx)\cos(nx)$$

$$= -\int_{0}^{\pi} dx'\, \text{sen}(mx')\cos(nx') + \int_{0}^{\pi} dx\, \text{sen}(mx)\cos(nx)$$

$$= 0$$

Simetria

- A terceira relação é verdade por simetria:

$$\begin{aligned}
\text{sen}(nx) &= -\text{sen}(-nx) \\
\cos(nx) &= \cos(-nx) \\
\implies \text{sen}\, mx \cos nx &= -\text{sen}(-mx)\cos(-nx)
\end{aligned}$$

- Define outra valiável $x' = -x$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \text{sen}\, mx \cos nx &= \int_{-\pi}^{0} dx\, \text{sen}(mx)\cos(nx) + \int_{0}^{\pi} dx\, \text{sen}(mx)\cos(nx) \\
&= \int_{0}^{\pi} dx'\, \text{sen}(-mx')\cos(-nx') + \int_{0}^{\pi} dx\, \text{sen}(mx)\cos(nx) \\
&= -\int_{0}^{\pi} dx'\, \text{sen}(mx')\cos(nx') + \int_{0}^{\pi} dx\, \text{sen}(mx)\cos(nx) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Simetria

- A terceira relação é verdade por simetria:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(nx) &= -\operatorname{sen}(-nx) \\ \cos(nx) &= \cos(-nx) \\ \implies \operatorname{sen} mx \cos nx &= -\operatorname{sen}(-mx)\cos(-nx) \end{aligned}$$

- Define outra valiável $x' = -x$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} mx \cos nx &= \int_{-\pi}^{0} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= \int_{0}^{\pi} dx' \operatorname{sen}(-mx')\cos(-nx') + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= -\int_{0}^{\pi} dx' \operatorname{sen}(mx')\cos(nx') + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Simetria

- A terceira relação é verdade por simetria:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(nx) &= -\operatorname{sen}(-nx) \\ \cos(nx) &= \cos(-nx) \\ \implies \operatorname{sen} mx \cos nx &= -\operatorname{sen}(-mx)\cos(-nx) \end{aligned}$$

- Define outra valiável $x' = -x$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} mx \cos nx &= \int_{-\pi}^{0} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= \int_{0}^{\pi} dx' \operatorname{sen}(-mx')\cos(-nx') + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= -\int_{0}^{\pi} dx' \operatorname{sen}(mx')\cos(nx') + \int_{0}^{\pi} dx \operatorname{sen}(mx)\cos(nx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ortogonalidade da base e^{-inx}

- Vamos primeiro mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \left(e^{imx}\right)^* e^{inx} = 2\pi\delta_{mn}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{i(n-m)x}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ipx} = \left.\frac{e^{ipx}}{ip}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \implies p = (n-m) \text{ é inteiro} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

- Com isso poodemos mostrar a ortogonalidade de $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$:

- Vamos primeiro mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{imx}\right)^* e^{inx} = 2\pi\delta_{mn}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \; e^{i(n-m)x}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ipx} = \left.\frac{e^{ipx}}{ip}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \implies p = (n-m) \text{ é inteiro} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

- Com isso poodemos mostrar a ortogonalidade de $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$:

Ortogonalidade da base e^{-inx}

- Vamos primeiro mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{imx}\right)^* e^{inx} = 2\pi\delta_{mn}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \; e^{i(n-m)x}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ipx} = \left.\frac{e^{ipx}}{ip}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \implies p = (n-m) \text{ é inteiro} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

- Com isso poodemos mostrar a ortogonalidade de $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$:

Ortogonalidade da base e^{-inx}

- Vamos primeiro mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{imx}\right)^* e^{inx} = 2\pi\delta_{mn}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \; e^{i(n-m)x}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ipx} = \left.\frac{e^{ipx}}{ip}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \implies p = (n-m) \text{ é inteiro} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

- Com isso poodemos mostrar a ortogonalidade de $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$:

Ortogonalidade da base sen nx

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(n-m)x} = 2\pi\delta_{m,n}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \Big(\cos\left[(n-m)x\right] + i \operatorname{sen}\left[(n-m)x\right] \Big)$$

Comparando a parte real e imaginária:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos\left[(n-m)x\right] = 2\pi\delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}\left[(n-m)x\right] = 0$$

Usando a identidade:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Ortogonalidade da base sen nx

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(n-m)x} = 2\pi\delta_{m,n}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \Big(\cos\left[(n-m)x\right] + i \,\mathrm{sen}\left[(n-m)x\right] \Big)$$

Comparando a parte real e imaginária:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos\left[(n-m)x\right] = 2\pi\delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\mathrm{sen}\left[(n-m)x\right] = 0$$

Usando a identidade:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\cos(n-m)x - \frac{1}{2}\cos(n+m)x = \mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,mx$$

Ortogonalidade da base sen nx

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(n-m)x} &= 2\pi\delta_{m,n} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} dx \Big(\cos\left[(n-m)x\right] + i \operatorname{sen}\left[(n-m)x\right] \Big)
\end{aligned}
$$

Comparando a parte real e imaginária:

$$
\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos\left[(n-m)x\right] = 2\pi\delta_{m,n}
$$

$$
\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}\left[(n-m)x\right] = 0
$$

Usando a identidade:

$$
\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta
$$

$$
\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos(n-m)x - \frac{1}{2}\cos(n+m)x = \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx
$$

Ortogonalidade da base sen nx

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(n-m)x} = 2\pi\delta_{m,n}$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \Big(\cos\left[(n-m)x\right] + i \operatorname{sen}\left[(n-m)x\right]\Big)$$

Comparando a parte real e imaginária:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos\left[(n-m)x\right] = 2\pi\delta_{m,n}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}\left[(n-m)x\right] = 0$$

Usando a identidade:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\cos(n-m)x - \frac{1}{2}\cos(n+m)x = \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx$$

Ortogonalidade da base sen nx

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(n-m)x} = 2\pi\delta_{m,n}$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\cos\left[(n-m)x\right] + i \,\mathrm{sen}\left[(n-m)x\right] \right)$$

Comparando a parte real e imaginária:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos\left[(n-m)x\right] = 2\pi\delta_{m,n}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\mathrm{sen}\left[(n-m)x\right] = 0$$

Usando a identidade:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$
$$\implies \frac{1}{2}\cos(n-m)x - \frac{1}{2}\cos(n+m)x = \mathrm{sen}\,mx\,\mathrm{sen}\,nx$$

Ortogonalidade da base sen nx

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos\left[(n-m)x\right] = \pi\delta_{m,n}$$

E assim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \,\text{sen}\, nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(n-m)x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(n+m)x$$

$$= \begin{cases} \text{se } m = n \neq 0 & \text{obtemos } \pi \\ \text{se } m \neq n & \text{obtemos } 0 \end{cases}$$

e finalmente mostramos

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \,\text{sen}\, nx = \pi\delta_{m,n}$$

Exercício: mostre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \pi\delta_{m,n}$$

Ortogonalidade da base sen nx

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos\left[(n-m)x\right] = \pi\delta_{m,n}$$

E assim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \,\text{sen}\, nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(n-m)x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(n+m)x$$

$$= \begin{cases} \text{se } m = n \neq 0 & \text{obtemos } \pi \\ \text{se } m \neq n & \text{obtemos } 0 \end{cases}$$

e finalmente mostramos

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \,\text{sen}\, mx \,\text{sen}\, nx = \pi\delta_{m,n}$$

Exercício: mostre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \pi\delta_{m,n}$$

Calculando coefficientes a_0

- Com essas relações de ortogonalidade, podemos calcular as coeficientes da série de Fourier. Por exemplo, a_0:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2} + \int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = a_0 \pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}(nx).$$

$$\Longrightarrow\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)$$

Calculando coefficientes a_0

- Com essas relações de ortogonalidade, podemos calcular as coeficientes da série de Fourier. Por exemplo, a_0:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2} + \int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}(nx).$$

$$\implies a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)$$

Calculando coefficientes a_0

- Com essas relações de ortogonalidade, podemos calcular as coeficientes da série de Fourier. Por exemplo, a_0:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2} + \int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = a_0 \pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}(nx).$$

$$\implies a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)$$

Calculando coefficientes a_0

- Com essas relações de ortogonalidade, podemos calcular as coeficientes da série de Fourier. Por exemplo, a_0:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2} + \int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}(nx)}.$$

$$\implies a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)$$

- Com essas relações de ortogonalidade, podemos calcular as coeficientes da série de Fourier. Por exemplo, a_0:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2} + \int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen}(nx)}.$$

$$\implies a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)$$

Calculando coeficientes a_0

- Podemos mostrar que geralmente

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx, \qquad m \geq 0$$
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\,\text{sen}\, mx, \qquad m > 0$$

- Por exemplo, para $m > 0$:

Calculando coefficientes a_0

- Podemos mostrar que geralmente

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx, \qquad m \geq 0$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\,\mathrm{sen}\, mx, \qquad m > 0$$

- Por exemplo, para $m > 0$:

Calculando coefficientes a_n, b_n

- Para $m > 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2}\cos mx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)\right]\cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\,\mathrm{sen}\,nx\cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{n,m}$$

$$= a_m$$

- Exercício: mostre $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\,\mathrm{sen}\,mx$

Calculando coeficientes a_n, b_n

- Para $m > 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2}\cos mx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)\right]\cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \mathrm{sen}\, nx \cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{n,m}$$

$$= a_m$$

- Exercício: mostre $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\,\mathrm{sen}\, mx$

Calculando coeficientes a_n, b_n

- Para $m > 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx &= \cancelto{0}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2}\cos mx} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]\cos mx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} nx \cos mx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{n,m} \\
&= a_m
\end{aligned}
$$

- Exercício: mostre $b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x) \operatorname{sen} mx$

- Para $m > 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx = \cancel{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2}\cos mx}^{\,0}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]\cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \operatorname{sen} nx \cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{n,m}$$

$$= a_m$$

- Exercício: mostre $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\operatorname{sen} mx$

Calculando coeficientes a_n, b_n

- Para $m > 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx = \cancelto{0}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2}\cos mx}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\,\mathrm{sen}(nx)\right]\cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\cos nx\cos mx + \cancelto{0}{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\,\mathrm{sen}\,nx\cos mx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\pi\delta_{n,m}$$

$$= a_m$$

- Exercício: mostre $b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\,\mathrm{sen}\,mx$

Calculando coefficientes a_n, b_n

- Para $m > 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx &= \cancelto{0}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\frac{a_0}{2}\cos mx} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)\right]\cos mx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi} dx\cos nx\cos mx + \cancelto{0}{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi} dx\,\mathrm{sen}\, nx\cos mx} \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\pi\delta_{n,m} \\
&= a_m
\end{aligned}
$$

- Exercício: mostre $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\,\mathrm{sen}\, mx$

- Para $m > 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos mx = \cancelto{0}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{a_0}{2}\cos mx}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)\right]\cos mx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx + \cancelto{0}{\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx\,\mathrm{sen}\,nx \cos mx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{n,m}$$

$$= a_m$$

- Exercício: mostre $b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\,\mathrm{sen}\,mx$