

# Física Matemática I: Lista de Exercícios 7

Prazo: 25 novembro 2019

1. Seja  $P_n(x)$  o  $n$ -ésimo polinômio de Legendre. Prove que  $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$ .  
Mostre então que  $\int_x^1 P_n(x) = [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]/(2n+1)$ .
2. Calcule o valor da integral  $\int_{-1}^1 dx x^n P_n(x)$
3. Obtenha a expansão em série de Legendre da função  $f(x) = |x|$  no intervalo  $-1 < x < 1$ .
4. [**Potencial de um anel uniformemente carregado**] Determine o potencial elétrico  $\phi(r, \theta)$  produzido no vácuo por um anel unidimensional de raio  $R$ , uniformemente carregado com carga elétrica total  $Q$  e densidade linear de carga  $\lambda = Q/(2\pi R)$ , nas seguintes regiões:
  - (a)  $r > R$ .
  - (b)  $r < R$ .
  - (c)  $r = R$ , mas  $\theta \neq \pi/2$ .

As variáveis  $r$  e  $\theta$  referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do anel e cujo eixo  $z$ , a partir de onde o ângulo  $\theta$  é medido, coincide com o eixo de simetria do anel.

*Sugestão 1.* Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução da equação de Laplace:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (1)$$

Os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  são fixados pela solução ao longo do eixo de simetria (que correspondem a  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ ).

*Sugestão 2.* Para  $x \in \mathbb{C}$  com  $|x| < 1$  e para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$ , vale a expansão binomial:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-k)_k}{k!} x^k, \quad (2)$$

onde, para  $y \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $(y)_n$  são os chamados símbolos de Pochhammer. Em particular, para  $|t| < 1$ , tem-se

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k, \quad (3)$$

com

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \quad (4)$$

5. [**Corda pendurada**] Determine a solução da equação da corda pendurada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \quad (5)$$

onde  $g > 0$ , que descreve o movimento de pequenas oscilações de uma corda de comprimento  $L$  localizada, quando em repouso, no intervalo  $0 \leq z \leq L$  do eixo vertical, pendurada pelo seu extremo superior (o que corresponde à condição de contorno  $u(L, t) = 0$  para todo  $t$ ) e com condições iniciais

$$u(z, 0) = u_0(z) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(z, 0) = v_0(z), \quad (7)$$

para certas funções  $u_0$  e  $v_0$  dadas.

*Sugestão:* A equação diferencial

$$zU''(z) + U'(z) + \lambda^2 U(z) = 0 \quad (8)$$

pode ser transformada na equação de Bessel de ordem zero

$$\zeta^2 y''(\zeta) + \zeta y'(\zeta) + \zeta^2 y(\zeta) = 0 \quad (9)$$

através das definições

$$\zeta = \sqrt{4\lambda^2 z} \quad (10)$$

$$U(z) = y(\zeta) = y(\sqrt{4\lambda^2 z}). \quad (11)$$