

# Física Matemática I: Lista de Exercícios 5

Prazo: 17 outubro 2019

1. Mostre que a transformação  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ , com

$$\xi = x + y - \cos(x) \quad (1)$$

$$\eta = x - y + \cos(x) \quad (2)$$

reduz a equação

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - 2 \operatorname{sen}(x) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} - \cos^2(x) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \cos(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

à forma canônica  $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta = 0$ .

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u(\xi, \eta) = 0. \quad (4)$$

2. Mostrar que a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

com as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x) \quad (7)$$

é dada pela solução original de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - vt) + f(x + vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' g(x') \quad (8)$$

3. Determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir cada uma das equações diferenciais parciais abaixo por pares de equações diferenciais ordinárias

- (a)  $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$
- (b)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$
- (c)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

4. Ache a solução do seguinte problema de condução de calor:

- $100 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < 1, t > 0.$
- $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, t > 0.$
- $u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) - 2\text{sen}(5\pi x), 0 \leq x \leq 1.$

5. Determine o potencial eletrostático  $V(x, y)$  na região  $x \geq 0$  limitada por 3 planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $y = b$ , sabendo-se que o plano  $x = 0$  é mantido a um potencial uniforme  $V_0$  e os outros 2 planos são mantidos a um potencial nulo. Considere que não há cargas elétricas no interior da região.

6. Considere a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

para  $0 < x < L$  e  $t > 0$ , com as condições

$$u(0, t) = 0 \quad (10)$$

$$u(L, t) + L \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (11)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (13)$$

Usando o método de separação de variáveis  $u(x, t) = X(x)T(t)$ ,

- (a) Mostre que  $X(x)$  deve satisfazer à equação  $X'' + \lambda^2 X = 0$ , onde  $\lambda^2$  é uma constante positiva;
- (b) Mostre que para se obter uma autofunção  $X(x)$  não-trivial, o parâmetro  $\lambda$  deve satisfazer à relação  $\tan(\lambda L) = -\lambda L$ ;
- (c) Calcule os 3 valores mais baixos possíveis para  $\lambda$

7. A equação de condução de calor em duas dimensões pode ser expressa em coordenadas polares planas como

$$\alpha^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14)$$

Supondo que  $u(r, \theta, t) = R(r)F(\theta)T(t)$ , obtenha as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por  $R(r)$ ,  $F(\theta)$ , e  $T(t)$ .

8. Uma partícula atômica está confinada dentro de uma caixa retangular de lados  $a$ ,  $b$ , e  $c$ . A partícula é descrita por uma função de onda  $\psi$  que satisfaz à equação de Schrödinger  $(-\hbar^2/2m)\nabla^2\psi = E\psi$ . Sabendo que a função de onda se anula em todos os pontos da superfície da caixa, calcule a energia  $E_0$  do estado fundamental da partícula.