Física Matemática I: Lista de Exercícios 2

Prazo: 16 setembro 2019

* Exercícios optativos (10,11,12)

1. Seja a função $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

   Calcule a transformada de Fourier $g(k)$ da função $f(x)$.

2. Considere a transformada de Fourier $g(k)$ da função $f(x)$. Mostre que se

   (a) $g(-k) = g^*(k)$ então $f(x)$ é real

   (b) $g(-k) = -g^*(k)$ então $f(x)$ é puramente imaginária

3. Seja $\tilde{f}(k)$ a transformada de Fourier de $f(x)$ e $\tilde{f}_a(k)$ a transformada de Fourier de $f(x+a)$. Mostre que $\tilde{f}_a(k) = e^{ika}\tilde{f}(k)$.

4. Mostre que as transformadas de Fourier em seno e co-seno de $f(x) = e^{-ax}$ são

$$g_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2 + a^2} \tag{2}$$

$$g_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2} \tag{3}$$

   Sem utilizar integração de contorno (teorema dos resíduos), mostre então que

$$\int_0^\infty dk \, \frac{k}{k^2 + a^2} \operatorname{sen}(kx) = \frac{\pi}{2} e^{-ax} \tag{4}$$

5. Determine a transformada de Fourier do pulso triangular

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - a|x|) & |x| < \frac{1}{a} \\ 0 & |x| > \frac{1}{a} \end{cases} \tag{5}$$

6. Mostre que a transformada de Fourier de uma função esfericamente simétrica pode ser escrita na forma

$$g(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty dr [r f(r)] \,\mathrm{sen}(kr). \tag{6}$$

7. A transformada de Fourier da função $f(\vec{r})$ é dada por

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \vec{k}^2}. \tag{7}$$

   Determine $f(\vec{r})$

8. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2} & |x| \leq 2 \\ 0 & |x| > 2. \end{cases} \tag{8}$$

   (a) Determine a transformada de Fourier de $f(x)$

   (b) Usando a relação de Parseval, calcule a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{\mathrm{sen}\, t}{t} \right]^4 \tag{9}$$

9. Sejam $\tilde{f}(k)$ e $\tilde{g}(k)$ as transformadas de Fourier das funções $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |f(x) - g(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \, |\tilde{f}(k) - \tilde{g}(k)|^2 \tag{10}$$

10. * A integral de Fourier

$$I = \frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega t}}{E_0 - i\Gamma/2 - \hbar\omega} \tag{11}$$

aparece em problemas de penetração de barreira, espalhamento, teoria de perturbação dependente do tempo e etc. Calcule o valor de I.

11. * Um oscilador harmônico que se encontra no estado fundamental é descrito por uma função de onda $\psi_0(x) \sim e^{-x^2/2a^2}$. Determine a função de onda normalizada no espaço dos momentos $p = \hbar k$, e verifique explicitamente a validade da relação de Parseval neste caso.

12. * O fator de forma nuclear $F(\vec{k})$ é a transformada de Fourier da distribuição de carga $\rho(\vec{r})$. Se ao medir o fator de forma encontra-se $F(k) = (2\pi)^{-3/2}(1+k^2/a^2)^{-1}$, calcule a distribuição de carga correspondente

13. Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} \tag{12}$$

com $x > 0$ e $t > 0$, sujeita às condições $F(0,t) = 0$ e $F(x,0) = 1$ se $0 < x < 1$ e $F(x,0) = 0$ se $x \geq 1$. Utilizando transformadas de Fourier em seno, mostre que a solução da equação é

$$F(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty du\, e^{-u^2 t} \operatorname{sen}(ux)(1 - \cos(u))/u \tag{13}$$