Física Matemática I: Lista de Exercícios 1

Prazo: ~~15~~ 19 agosto 2019

1. Determine a série de Fourier da função periódica (descontínua)

$$f(x) = \cos(px) \tag{1}$$

com $-\pi \leq x < \pi$ e com $p \notin \mathbb{Z}$. (I.e., $p \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

A partir do resultado mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 1} \tag{2}$$

2. A variação de pressão $f(t) = \Delta P/P_0$ em torno da pressão atmosférica, que corresponde a uma onda sonora que se propaga no ar é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ -\frac{7}{8} & \text{para } \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{7}{8} & \text{para } \frac{T}{2} \leq t < \frac{3T}{4} \\ -1 & \text{para } \frac{3T}{4} \leq t < T \end{cases} \tag{3}$$

onde T é o período.

Considerando a decomposição dessa onda nos seus harmônicos, que harmônico pode ser detectado com mais clareza? Dê a intensidade relativa ($\sim b_n^2/b_1^2$ onde b_n é o n-ésimo coeficiente da série de Fourier) de cada um dos 10 primeiros harmônicos.

3. Determine a série de Fourier que corresponde à função

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{para } -3 < x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

cujo período é igual a 6.

4. Obtenha a série de Fourier de senos que representa a função $f(x) = e^x$ no intervalo $(0, \pi)$.

5. Obtenha a série de Fourier de co-senos que representa a função $f(x) = e^x$ no intervalo $(0, \pi)$.

6. Ache a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{para } 0 < x < 5 \end{cases} \tag{5}$$

cujo período é igual a 10.

7. Uma corrente alternada $i(t) = A\,\text{sen}(\omega t)$ passou por a) um retificador de meia onda que transmite a corrente somente quando ela passa no sentido positivo e b) um retificador de onda completa, que transmite o valor absoluto (instantâneo) da corrente. Mostre que no primeiro caso a saída é

$$\frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\,\text{sen}(\omega t) - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cos[(n+1)\omega t]}{n(n+2)} \tag{6}$$

e no segundo caso é

$$\frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{\cos(n\omega t)}{n^2-1} \tag{7}$$

8. Utilizando a equação de Parseval, e considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases} \tag{8}$$

mostre que $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \ldots = \pi^2/8$.

9. Considere a função de período $T = 2\pi$, $f(x) = e^x$ para $-\pi < x < \pi$. Obtenha os coeficientes da série complexa de Fourier c_n.

10. Uma corda de comprimento L vibra presa nas suas extremidades $x = 0$ e $x = L$. O movimento é descrito pela equação de onda $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$. Supondo que a solução seja da forma $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\text{sen}(n\pi x/L)$, determine os coeficientes $b_n(t)$ considerando as condições iniciais $u(0,x) = f(x)$ e $\partial u(0,x)/\partial t = g(x)$.