Soluções:
FisMat II Exercicios 5

Prazo: 31 Maio 2019

1. [**Equação de Airy**] Determine a solução geral da *equação de Airy*

$$y''(x) - xy(x) = 0 \tag{1}$$

na forma de uma expansão em série

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{2}$$

Determine a região de convergência da solução encontrada.

Nota. A equação de Airy surge em problemas de Mecânica Quântica (partícula em uma dimensão submetida a um potencial linear).

Inserindo a série na equação:

$$y'' - xy = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - x\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k \tag{4}$$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1}\right] x^k \tag{5}$$

Cada monômio x^k é independente e então, cada coefficiente é zero.

$$2c_2 = 0 \tag{6}$$

$$c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1} = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{7}$$

$$\implies c_{k+3} = \frac{c_k}{(k+3)(k+2)}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{8}$$

Os coeficientes c_0 e c_1 não são determinados pela equação. (São determinados pelas condições iniciais $y(0) = c_0$, $y'(x) = c_1$). Os outros são

$$c_{3k} = \prod_{n=0}^{k/3-1} \left[\frac{1}{(3n+3)(3n+2)} \right] c_0 \tag{9}$$

$$c_{3k+1} = \prod_{n=0}^{k/3-2} \left[\frac{1}{(3n+4)(3n+3)} \right] c_1 \tag{10}$$

$$c_{3k+2} = 0, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{11}$$

Podemos separar a série em 2 partes:

$$y(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k} x^{3k} + c_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k+1} x^{3k+1} \tag{12}$$

$$= c_0 + c_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k} \left(x^3\right)^k + x \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k+1} (x^3)^k \tag{13}$$

e determinar a região de convergência de cada das 2 somas.

Pelo teste de razão na primeira soma, o raio de convergência é

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{3k}}{c_{3(k+1)}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\prod_{n=0}^{k-1} \left[\frac{1}{(3n+3)(3n+2)} \right] c_0}{\prod_{n=0}^{k} \left[\frac{1}{(3n+3)(3n+2)} \right] c_0} \right| \tag{14}$$

$$= \infty \tag{15}$$

Não existe o limite, e a série converge para toda x.

A segunda também converge para toda x.

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{3k+1}}{c_{3(k+1)+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} (3k+4)(3k+3) = \infty \tag{16}$$

2. [**Corda pendurada**] Determine a solução da equação da corda pendurada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{17}$$

onde $g > 0$, que descreve o movimento de pequenas oscilações de uma corda de comprimento L localizada, quando em repouso, no intervalo $0 \leq z \leq L$ do eixo vertical, pendurada pelo seu extremo superior (o que corresponde à condição de contorno $u(L, t) = 0$ para todo t) e com condições iniciais

$$u(z, 0) = u_0(z) \tag{18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(z, 0) = v_0(z), \tag{19}$$

para certas funções u_0 e v_0 dadas.

Sugestão: A equação diferencial

$$zU''(z) + U'(z) + \lambda^2 U(z) = 0 \tag{20}$$

pode ser transformada na equação de Bessel de ordem zero

$$\zeta^2 y''(\zeta) + \zeta y'(\zeta) + \zeta^2 y(\zeta) = 0 \tag{21}$$

através das definições

$$\zeta = \sqrt{4\lambda^2 z} \tag{22}$$

$$U(z) = y(\zeta) = y(\sqrt{4\lambda^2 z}). \tag{23}$$

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{24}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gz\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g\frac{\partial u}{\partial z} \tag{25}$$

A equação é separável. Usando separação de variáveis:

$$
\begin{align}
u(z,t) &= U(z)T(t) \tag{26} \\
U\frac{d^2T}{\partial t^2} &= gzT\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + gT\frac{\partial U}{\partial z} \tag{27} \\
\implies \frac{d^2T}{dt^2} &= -CT(t) \tag{28} \\
z\frac{d^2U}{dz^2} + \frac{dU}{dz} &= -\frac{C}{g}U(z), \tag{29}
\end{align}
$$

para algum constante C.

A solução geral da função de t, é

$$
T(t) = e^{i\lambda t}, \tag{30}
$$

onde λ não é necessariamente real, e $C = \lambda^2$.

A equação para U pode ser transformada na equação de Bessel de ordem zero

$$
\begin{align}
\zeta &= \sqrt{\frac{4Cz}{g}} \equiv \sqrt{\eta z} \tag{31} \\
U(z) = y(\zeta) &= y(\sqrt{\frac{4C}{g}z}) = y(\sqrt{\eta z}) \tag{32} \\
d\zeta &= \sqrt{\frac{\eta}{4z}}dz \tag{33} \\
U'(z) &= \frac{\partial}{\partial z}y\left(\sqrt{\frac{4Cz}{g}}\right) = \sqrt{\frac{C}{gz}}y'(\zeta) \tag{34} \\
zU''(z) &= z\frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{\frac{C}{gz}}y'(\zeta)\right] = \frac{C}{g}y''(\zeta) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{gz}}y'(\zeta) \tag{35} \\
zU''(z) + U'(z) + \frac{C}{g}U(z) &= \frac{C}{g}y''(\zeta) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{gz}}y'(\zeta) + \frac{C}{g}y(\zeta) \tag{36} \\
&= \frac{1}{4z}\left[\zeta^2 y''(\zeta) + \zeta y'(\zeta) + \zeta^2 y(\zeta)\right] = 0 \tag{37} \\
& \tag{38}
\end{align}
$$

As soluções são as funções de Bessel de ordem zero que são regulares a $z = 0$, $J_0(\zeta)$.

A condição de contorno $u(L,t) = 0$ implica que $U(L) = y(\sqrt{\frac{4CL}{g}}) = 0$.

Seja j_k a k-essimo zero da função de Bessel tal que

$$J_0(j_k) = 0 \tag{39}$$

Note-se que os zeros são reais.

Se

$$\sqrt{\frac{4CL}{g}} = j_k \tag{40}$$

$$C = \lambda_k^2 = \frac{j_k^2 g}{4L} \tag{41}$$

$$\implies J_0\left(\sqrt{\frac{4\lambda_k^2 L}{g}}\right) = J_0(j_k) = 0 \tag{42}$$

A solução geral, então, é

$$u(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{sen}(\lambda_k t) + B_k \cos(\lambda_k t)\right) J_0\left(\sqrt{\frac{4\lambda_k^2 z}{g}}\right) \tag{43}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{sen}(\lambda_k t) + B_l \cos(\lambda_k t)\right) J_0\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) \tag{44}$$

com

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{j_k^2 g}{4L}} \tag{45}$$

As outras condições de contorno determinam os coeficientes A_k, B_k:

$$u(z,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) = u_0(z) \tag{46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(z,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0\left(j_k\sqrt{\frac{z}{L}}\right) = v_0(z), \tag{47}$$

com

$$B_k = \frac{2}{LJ_0'^2(j_k)} \int_0^{\sqrt{L}} x u_0(x^2) J_m(j_k \frac{x}{\sqrt{L}}) dx \tag{48}$$
$$= \frac{1}{LJ_0'^2(j_k)} \int_0^{L} u_0(z) J_m(j_k \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{L}}) dz \tag{49}$$
$$= \frac{1}{LJ_1^2(j_k)} \int_0^{L} u_0(z) J_m\left(j_k \sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz \tag{50}$$
$$A_k = \frac{1}{\lambda_k LJ_0'^2(j_k)} \int_0^{L} v_0(z) J_m\left(j_k \sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz \tag{51}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{Lg} j_k J_1^2(j_k)} \int_0^{L} v_0(z) J_m\left(j_k \sqrt{\frac{z}{L}}\right) dz \tag{52}$$

---

3. [**Membrana circular com amortecimento**] Determine a solução da equação de ondas *com amortecimento*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = 0, \tag{53}$$

$\gamma > 0$, em <u>duas</u> dimensões, no interior de um disco de raio $R > 0$, com $|u(\rho, \phi, t)| < \infty$, com condições de contorno de Dirichlet $u(R, \phi, t) = 0$ e com as condições iniciais

$$u(\rho, \phi, 0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \phi, 0) = \nu_0(\rho), \tag{54}$$

onde

$$\nu_0(\rho) = \begin{cases} V, & 0 \leq \rho \leq R_0, \\ 0, & R_0 < \rho \leq R, \end{cases} \tag{55}$$

onde $0 < R_0 < R$. Acima, as coordenadas ρ e ϕ referem-se ao sistema de coordenadas polares cuja origem coincide com o centro do disco de raio R.

Sugestão 1. Ao resolver a equação para a parte temporal (método de separação de variáveis), lembre-se que os modos de vibração podem ter amortecimento sub-crítico, crítico ou super-crítico. Para simplificar, considere que não haja amortecimento crítico. *Sugestão 2.* Para o cômputo explícito das integrais referentes às condições iniciais (54), use o fato que

$$xJ_0(x) = \frac{d}{dx}\left(xJ_1(x)\right). \tag{56}$$

Os modos de oscilação de problemas com amortecimento, como o de acima, são denominados *modos quase-normais*.

Em duas dimensões:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \tag{57}$$

$$0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u \tag{58}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \tag{59}$$

Usando separação de variáveis:

$$u(\rho,\phi,t) \equiv R(\rho)P(\phi)T(t) \tag{60}$$

$$\frac{\rho^2}{Tc^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \gamma\frac{\rho^2}{T}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial\phi^2} = \text{const.} \equiv -m^2 \tag{61}$$

$$P''(\phi) + m^2 P(\phi) = 0 \tag{62}$$

$$P(\phi) = e^{im\phi} \tag{63}$$

P deve ser periódica, e então $m \in \mathbb{Z}$.

As equações radial e temporal são

$$\frac{1}{Tc^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \gamma\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2} = \text{const.} \equiv -\ell^2 \tag{64}$$

$$\implies T''(t) + c^2\gamma T'(t) + c^2\ell^2 T(t) = 0 \tag{65}$$

$$\rho\left(\rho R'\right)' - (\ell^2\rho^2 - m^2)R = \rho^2 R'' + \rho R' + (\ell^2\rho^2 - m^2)R = 0 \tag{66}$$

Eq. (66) é a equação de Bessel, de ordem $m \in \mathbb{Z}$. A solução geral é

$$R(\rho) = \alpha_1 J_m(\ell\rho) + \alpha_2 N_m(\ell\rho) \tag{67}$$

Porém, queremos que a solução seja regular no origem $\phi = 0$, então $\alpha_2 = 0$:

$$R(\rho) = \alpha J_m(\ell\rho) \tag{68}$$

A condição de contorno de Dirichlet exige que

$$R(\rho = R) = \alpha J_m(\ell R) = 0 \tag{69}$$

$$\implies \ell R = j_{mk} \tag{70}$$

$$\ell_k = \frac{j_{mk}}{R} \tag{71}$$

onde j_{mk} é a k-éssimo zero da função de Bessel de ordem m

$$J_m(j_{mk}) = 0. \tag{72}$$

Eq. (65) é a equação de oscilador com amortecimento, e tem soluções da forma

$$T(t) = e^{-\Lambda t} \tag{73}$$

$$\implies 0 = \Lambda^2 - c^2\gamma\Lambda + c^2\ell^2 \tag{74}$$

$$\Lambda_\pm = \frac{c^2\gamma \pm \sqrt{c^4\gamma^2 - 4c^2\ell^2}}{2} \tag{75}$$

Tem três casos, quando a raiz é real, imaginário, ou zero:

$$\begin{cases} \ell^2 > \frac{c^2\gamma^2}{4} & \text{amortecimento sub-crítico} \\ \ell^2 = \frac{c^2\gamma^2}{4} & \text{amortecimento crítico} \\ \ell^2 < \frac{c^2\gamma^2}{4} & \text{amortecimento super-crítico} \end{cases} \tag{76}$$

Vamos assumir que não existe um k tal que $l_k \equiv \frac{j_{mk}}{R} = c\gamma/2$, e amortecimento crítico não é possível.

No caso de amortecimento super-crítico, Λ é sempre real, e positivo:

$$T(t) = C_+ e^{-\Lambda_+ t} + C_- e^{-\Lambda_- t} \tag{77}$$

A primeira condição inicial exige que

$$
\begin{aligned}
T(0) &= C_+ + C_- = 0 && (78)\\
\implies T(t) &= C\left(e^{-\Lambda_+ t} - e^{-\Lambda_- t}\right) && (79)\\
&= e^{-\frac{c^2\gamma}{2}t}\,\mathrm{senh}\left(t\sqrt{\frac{c^4\gamma^2}{4} - c^2\ell^2}\right) && (80)
\end{aligned}
$$

No caso de amortecimento sub-critico, Λ é complexo

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\pm &= \Lambda_R \pm i\Lambda_I && (81)\\
&= \frac{c^2\gamma}{2} \pm i\sqrt{\frac{c^4\gamma^2}{4} - c^2\ell^2} && (82)\\
T(t) &= e^{-\Lambda_R t}\left(C_+ e^{i\Lambda_I t} + C_- e^{-i\Lambda_I t}\right) && (83)
\end{aligned}
$$

A primeira condição inicial exige que

$$
\begin{aligned}
T(0) &= (C_+ + C_-) = 0 && (84)\\
\implies T(t) &= e^{-\Lambda_R t}\,\mathrm{sen}(\Lambda_I t) && (85)\\
&= e^{-\frac{c^2\gamma}{2}t}\,\mathrm{sen}\left(t\sqrt{\frac{c^4\gamma^2}{4} - c^2\ell^2}\right) && (86)
\end{aligned}
$$

Para simplificar notação, definimos

$$
\begin{aligned}
\Omega &\equiv \frac{c^2\gamma}{2} && (87)\\
\omega_k &\equiv \sqrt{\left|\frac{c^4\gamma^2}{4} - c^2\ell_k^2\right|} && (88)
\end{aligned}
$$

A solução geral do problema até aqui é

$$
u(\rho,\phi,t) = e^{-\Omega t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi}\left[\sum_{k=1}^{k'} A_{mk}\,\mathrm{senh}(\omega_k t)J_{|m|}\left(\frac{j_{mk}}{R}\rho\right) + \sum_{k=k'+1}^{\infty} B_{mk}\,\mathrm{sen}(\omega_k t)J_{|m|}\left(\frac{j_{mk}}{R}\rho\right)\right] \tag{89}
$$

onde k' é a maior inteiro tal que

$$j_{mk} < \frac{2}{c\gamma R} \tag{90}$$

A última condição inicial é

$$\begin{aligned}
\nu_0(\rho) &= \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \phi, 0) && (91)\\
&= -\Omega u(\rho, \phi, 0) && (92)\\
&\quad + \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} e^{-\Omega t} \left[\sum_{k=1}^{k'} A_{mk}\omega_k \cos(\omega_k t) J_{|m|}\left(\frac{j_{mk}}{R}\rho\right) + \sum_{k=k'+1}^{\infty} B_{mk}\omega_k \cosh(\omega_k t) J_{|m|}\left(\frac{j_{mk}}{R}\rho\right)\right] && (93)\\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} e^{-\Omega t} \left[\sum_{k=1}^{k'} A_{mk}\omega_k \cos(\omega_k t) J_{|m|}\left(\frac{j_{mk}}{R}\rho\right) + \sum_{k=k'+1}^{\infty} B_{mk}\omega_k \cosh(\omega_k t) J_{|m|}\left(\frac{j_{mk}}{R}\rho\right)\right] && (94)
\end{aligned}$$

A condição é independente de ϕ. Então, todos os coeficientes com $m \neq 0$ são zero.

$$u(\rho, \phi, t) = u(\rho, t) = e^{-\Omega t} \left[\sum_{k=1}^{k'} A_k \operatorname{senh}(\omega_k t) J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right) + \sum_{k=k'+1}^{\infty} B_{mk} \operatorname{sen}(\omega_k t) J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right)\right] \tag{95}$$

$$\nu_0(\rho) = \sum_{k=1}^{k'} A_k\omega_k J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right) + \sum_{k=k'+1}^{\infty} B_{mk}\omega_k J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right) \tag{96}$$

onde

$$\nu_0(\rho) = \begin{cases} V, & 0 \le \rho \le R_0, \\ 0, & R_0 < \rho \le R, \end{cases} \tag{97}$$

As funções $J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right)$ formam um base ortogonal completo no intervalo $\rho \in [0, R]$. Então, a função $\nu_0(\rho)$ pode ser escrito

$$\nu_0(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(j_n \frac{\rho}{R}) \tag{98}$$

com

$$a_n = \langle \nu_0, J_0 \rangle_r = \frac{2}{R^2 J_1^2(j_n)} \int_0^R \rho \nu_0(\rho) J_0(j_n \frac{\rho}{R}) d\rho \tag{99}$$

$$= \frac{2V}{R^2 J_1^2(j_n)} \int_0^{R_0} \rho J_0(j_n \frac{\rho}{R}) d\rho \tag{100}$$

$$= \frac{2V}{R^2 J_1^2(j_n)} \int_0^{R_0} \rho J_0(j_n \frac{\rho}{R}) d\rho \tag{101}$$

Tem a relação de recorrência

$$x^m J_{m-1}(x) = \frac{d}{dx} \left[x^m J_m \right] \tag{102}$$

$$x J_0(x) = \frac{d}{dx} \left[x J_1(x) \right] \tag{103}$$

$$j_n \frac{\rho}{R} J_0(j_n \frac{\rho}{R}) = \frac{R}{j_n} \frac{d}{d\rho} \left[j_n \frac{\rho}{R} J_1(j_n \frac{\rho}{R}) \right] \tag{104}$$

$$= \frac{d}{d\rho} \left[\rho J_1(j_n \frac{\rho}{R}) \right] \tag{105}$$

Então, temos

$$a_n = \frac{2V}{R^2 J_1^2(j_n)} \frac{R}{j_n} \int_0^{R_0} \frac{d}{d\rho} \left[\rho J_1(j_n \frac{\rho}{R}) \right] d\rho \tag{106}$$

$$= \frac{2V}{R j_n J_1^2(j_n)} \left[\rho J_1(j_n \frac{\rho}{R}) \right]_0^{R_0} \tag{107}$$

$$= \frac{2V R_0}{R j_n J_1^2(j_n)} J_1(j_n \frac{R_0}{R}) \tag{108}$$

A condição inicial é agora

$$\nu_0(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V R_0}{R j_n J_1^2(j_n)} J_1(j_n \frac{R_0}{R}) J_0(j_n \frac{\rho}{R}) \tag{109}$$

$$= \sum_{k=1}^{k'} A_k \omega_k J_0 \left(\frac{j_k}{R} \rho \right) + \sum_{k=k'+1}^{\infty} B_{mk} \omega_k J_0 \left(\frac{j_k}{R} \rho \right) \tag{110}$$

Para $k < k'$

$$\frac{2VR_0}{Rj_k J_1^2(j_k)} J_1(j_k \frac{R_0}{R}) = A_k \omega_k \tag{111}$$

$$A_k = \frac{2VR_0 J_1(j_k \frac{R_0}{R})}{Rj_k J_1^2(j_k)\omega_k} \tag{112}$$

e para $k > k'$

$$B_k = \frac{2VR_0 J_1(j_k \frac{R_0}{R})}{Rj_k J_1^2(j_k)\omega_k} \tag{113}$$

A solução final é

$$u(\rho,\phi,t) = e^{-\Omega t}\frac{2VR_0}{R}\Bigg[\sum_{k=1}^{k'} \frac{J_1(j_k \frac{R_0}{R})}{j_k J_1^2(j_k)\omega_k} \operatorname{senh}(\omega_k t) J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right) + \sum_{k=k'+1}^{\infty} \frac{J_1(j_k \frac{R_0}{R})}{j_k J_1^2(j_k)\omega_k} \operatorname{sen}(\omega_k t) J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right)\Bigg] \tag{114}$$

$$= e^{-\frac{c^2\gamma}{2}t}\frac{2VR_0}{R}\Bigg[\sum_{k=1}^{k'} \frac{J_1(j_k \frac{R_0}{R})}{j_k J_1^2(j_k)\sqrt{\left|\frac{c^4\gamma^2}{4} - c^2\frac{j_k^2}{R^2}\right|}} \operatorname{senh}(\sqrt{\left|\frac{c^4\gamma^2}{4} - c^2\frac{j_k^2}{R^2}\right|}t) J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right) + \sum_{k=k'+1}^{\infty} \frac{J_1(j_k \frac{R_0}{R})}{j_k J_1^2(j_k)\sqrt{\left|\frac{c^4\gamma^2}{4} - c^2\frac{j_k^2}{R^2}\right|}} \operatorname{sen}(\sqrt{\left|\frac{c^4\gamma^2}{4} - c^2\frac{j_k^2}{R^2}\right|}t) J_0\left(\frac{j_k}{R}\rho\right)\Bigg] \tag{115}$$

---

4. [**Potencial de um anel uniformemente carregado**] Determine o potencial elétrico $\phi(r,\theta)$ produzido no vácuo por um anel unidimensional de raio R, uniformemente carregado com carga elétrica total Q e densidade linear de carga $\lambda = Q/(2\pi R)$, nas seguintes regiões:

   (a) $r > R$.

   (b) $r < R$.

   (c) $r = R$, mas $\theta \neq \pi/2$.

   As variáveis r e θ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do anel e cujo eixo z, a partir de onde o ângulo θ é medido, coincide com o eixo de simetria do anel.

Sugestão 1. Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução da equação de Laplace:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \tag{116}$$

Os coeficientes A_n e B_n são fixados pela solução ao longo do eixo de simetria (que correspondem a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$).

Sugestão 2. Para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, vale a expansão binomial:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - k)_k}{k!} x^k, \tag{117}$$

onde, para $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(y)_n$ são os chamados símbolos de Pochhammer. Em particular, para $|t| < 1$, tem-se

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k, \tag{118}$$

com

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \tag{119}$$

A carga fica na região $\theta = \pi/2$ e $r = R$.

Todas as outras regiões ficam sem carga e a potencial elétrico ϕ satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi(r,\theta) = 0 \tag{120}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \tag{121}$$

O problema tem uma simetria rotacional, e então, ϕ não depende do angulo azimutal.

Usando separação de variáveis:

$$\phi(r,\theta) = R(r)T(\theta) \tag{122}$$

$$\frac{1}{Rr^2} \left(r^2 R' \right)' = -\frac{1}{Tr^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \text{const} = \ell^2 \tag{123}$$

A equação angular é a equação de Legendre. As soluções são os polinômios de Legendre

$$T(\theta) = P_\ell(\cos\theta), \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots \tag{124}$$

Para cada valor de ℓ, as soluções da equação radial são r^ℓ e $r^{-\ell-1}$

A solução geral é

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \tag{125}$$

Ao longo do eixo de simetria, $\cos\theta = 1$ e $P_\ell(\cos\theta) = 1$.

$$\phi(r,0) = \phi(r,\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) \tag{126}$$

Ao longo do eixo de simetria, a distancia a um ponto no anel é $\sqrt{z^2 + R^2} = \sqrt{r^2 + R^2}$, e a potencial é

$$\psi(r,0) = \frac{kQ}{\sqrt{r^2 + R^2}} \tag{127}$$

onde k é a constante de Coulomb

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{128}$$

Usando sugestão 2, podemos escrever

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^n, \quad t < 1 \tag{129}$$

$$(r^2 + R^2)^{-1/2} = R^{-1}(1 + \frac{r^2}{R^2})^{-1/2} \tag{130}$$

$$= R^{-1} + R^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^n, \quad r < R \tag{131}$$

$$(r^2 + R^2)^{-1/2} = r^{-1}(1 + \frac{R^2}{r^2})^{-1/2} \tag{132}$$

$$= r^{-1} + r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^n, \quad r > R \tag{133}$$

com

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \tag{134}$$

A potencial na região $r < R$ é

$$\psi(r, 0) = \frac{kQ}{\sqrt{r^2 + R^2}} \tag{135}$$

$$= \frac{kQ}{R} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^n\right] \tag{136}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \tag{137}$$

Para n impar, os coeficientes são zero

$$A_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{138}$$

Isso é claro por que o problema tem uma simetria de paridade $r \to -r$.

Os coeficientes pares são

$$A_0 = \frac{kQ}{R} \tag{139}$$

$$A_{2n} = \frac{kQ}{R}\frac{\alpha_n}{R^{2n}} \tag{140}$$

$$= (-1)^n \frac{kQ(2n-1)!!}{R^{2n+1}(2n)!!}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{141}$$

Com todos os coeficientes já determinados, a solução nesta região é

$$\phi(r,\theta) = \frac{kQ}{R} P_0(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \tag{142}$$

$$= \frac{kQ}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{kQ(2n-1)!!}{R^{2n+1}(2n)!!} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \tag{143}$$

$$= \frac{kQ}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{Q(2n-1)!!}{4\pi\epsilon_0 R^{2n+1}(2n)!!} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \tag{144}$$

A potencial na região $R < r$ é

$$\psi(r,0) = \frac{kQ}{\sqrt{r^2+R^2}} \tag{145}$$

$$= \frac{kQ}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^n\right] \tag{146}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} \tag{147}$$

De novo os coeficientes impares são zero $B_{2n+1} = 0$. Os coeficientes pares são

$$B_0 = kQ \tag{148}$$

$$B_{2n} = kQR^{2n}\alpha_n \tag{149}$$

$$= (-1)^n \frac{kQR^{2n}(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{150}$$

A potencial na região $R = r$ é

$$\psi(R,0) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+R^2}} \tag{151}$$

$$= \frac{kQ}{\sqrt{2}R} \tag{152}$$

A solução geral (em todos as regiões sem carga) é

$$\phi(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} \frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{R^{2n+1}(2n)!!} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta) & r < R \\ \frac{1}{\sqrt{2}R} & r = R \\ \frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{R^{2n}(2n-1)!!}{(2n)!!} r^{-2n} P_{2n}(\cos\theta) & r > R \end{cases} \tag{153}$$