Física Matemática II: Lista de Exercícios 5

Prazo: 31 Maio 2019

1. [**Equação de Airy**] Determine a solução geral da *equação de Airy*

$$y''(x) - xy(x) = 0 \tag{1}$$

na forma de uma expansão em série

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{2}$$

Determine a região de convergência da solução encontrada.

Nota. A equação de Airy surge em problemas de Mecânica Quântica (partícula em uma dimensão submetida a um potencial linear).

2. [**Corda pendurada**] Determine a solução da equação da corda pendurada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{3}$$

onde $g > 0$, que descreve o movimento de pequenas oscilações de uma corda de comprimento L localizada, quando em repouso, no intervalo $0 \leq z \leq L$ do eixo vertical, pendurada pelo seu extremo superior (o que corresponde à condição de contorno $u(L,t) = 0$ para todo t) e com condições iniciais

$$u(z,0) = u_0(z) \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(z,0) = v_0(z), \tag{5}$$

para certas funções u_0 e v_0 dadas.

Sugestão: A equação diferencial

$$zU''(z) + U'(z) + \lambda^2 U(z) = 0 \tag{6}$$

pode ser transformada na equação de Bessel de ordem zero

$$\zeta^2 y''(\zeta) + \zeta y'(\zeta) + \zeta^2 y(\zeta) = 0 \tag{7}$$

através das definições

$$\zeta = \sqrt{4\lambda^2 z} \tag{8}$$

$$U(z) = y(\zeta) = y(\sqrt{4\lambda^2 z}). \tag{9}$$

3. [**Membrana circular com amortecimento**] Determine a solução da equação de ondas *com amortecimento*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = 0, \tag{10}$$

$\gamma > 0$, em <u>duas</u> dimensões, no interior de um disco de raio $R > 0$, com $|u(\rho, \phi, t)| < \infty$, com condições de contorno de Dirichlet $u(R, \phi, t) = 0$ e com as condições iniciais

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \phi, 0) &= \nu_0(\rho), \end{aligned} \tag{11}$$

onde

$$\nu_0(\rho) = \begin{cases} V, & 0 \le \rho \le R_0, \\ 0, & R_0 < \rho \le R, \end{cases} \tag{12}$$

onde $0 < R_0 < R$. Acima, as coordenadas ρ e ϕ referem-se ao sistema de coordenadas polares cuja origem coincide com o centro do disco de raio R.

Sugestão 1. Ao resolver a equação para a parte temporal (método de separação de variáveis), lembre-se que os modos de vibração podem ter amortecimento sub-crítico, crítico ou super-crítico. Para simplificar, considere que não haja amortecimento crítico. *Sugestão 2.* Para o cômputo explícito das integrais referentes às condições iniciais (11), use o fato que

$$xJ_0(x) = \frac{d}{dx}\left(xJ_1(x)\right). \tag{13}$$

Os modos de oscilação de problemas com amortecimento, como o de acima, são denominados *modos quase-normais*.

4. [**Potencial de um anel uniformemente carregado**] Determine o potencial elétrico $\phi(r,\theta)$ produzido no vácuo por um anel unidimensional de raio R, uniformemente carregado com carga elétrica total Q e densidade linear de carga $\lambda = Q/(2\pi R)$, nas seguintes regiões:

   (a) $r > R$.

   (b) $r < R$.

   (c) $r = R$, mas $\theta \neq \pi/2$.

   As variáveis r e θ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do anel e cujo eixo z, a partir de onde o ângulo θ é medido, coincide com o eixo de simetria do anel.

   Sugestão 1. Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução da equação de Laplace:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \tag{14}$$

   Os coeficientes A_n e B_n são fixados pela solução ao longo do eixo de simetria (que correspondem a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$).

   Sugestão 2. Para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, vale a expansão binomial:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-k)_k}{k!} x^k, \tag{15}$$

   onde, para $y \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(y)_n$ são os chamados símbolos de Pochhammer. Em particular, para $|t| < 1$, tem-se

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k, \tag{16}$$

   com

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \tag{17}$$