# **Soluções:**

# FisMat II Exercicios 4

Prazo: 17 Maio 2019

1. Determine a função de Green para o seguinte problema de Sturm:

$$u'' = f(x) \tag{1}$$

com

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \tag{2}$$
$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \tag{3}$$

com $x \in [a, b], a < b$.

Mostre que esse problema só tem solução se $(b - a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

---

Podemos construir a função de Green com duas soluções independentes $v_1$ e $v_2$ da equação homogênea $u'' = 0$ que satisfazem as condições de contorno:

$$\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) = 0 \tag{4}$$
$$\beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = 0 \tag{5}$$

A solução geral da equação $u'' = 0$ é

$$v_i(x) = C_i x + D_i. \tag{6}$$

As condições de contorno da $v_1$ e $v_2$ são

$$\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) = \alpha_1(C_1 a + D_1) + \alpha_2 C_1 = 0 \tag{7}$$

$$\implies \alpha_1 D_1 = -(\alpha_2 + \alpha_1 a) C_1 \tag{8}$$

$$v_1(x) = \begin{cases} C_1 \left(x - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) & \text{se } \alpha_1 \neq 0 \\ D_1 & \text{se } \alpha_1 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = \beta_1(C_2 a + D_2) + \beta_2 C_2 = 0 \tag{10}$$

$$\implies \beta_1 D_2 = -(\beta_2 + \beta_1 b) C_2 \tag{11}$$

$$v_2(x) = \begin{cases} C_2 \left(x - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) & \text{se } \beta_1 \neq 0 \\ D_2 & \text{se } \beta_1 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

É necessário que a função Wronskiana

$$W(x) \equiv \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_1'(x) \\ v_2(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{13}$$

ou seja, no caso $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$.

$$v_1(x) v_2'(x) - v_2(x) v_1'(x) \neq 0 \tag{14}$$

$$= C_1 \left(x - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) C_2 - C_1 C_2 \left(x - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \tag{15}$$

$$= C_1 C_2 \left(b - a + \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \tag{16}$$

$$= C_1 C_2 \left(b - a + \frac{\beta_2 \alpha_1 - \alpha_2 \beta_1}{\beta_1 \alpha_1}\right) \tag{17}$$

ou seja

$$\alpha_1 \beta_1 (b - a) + \beta_2 \alpha_1 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0. \tag{18}$$

No caso $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$,

$$W(x) = v_1(x) v_2'(x) - v_2(x) v_1'(x) = D_1 C_2 \tag{19}$$

e no caso $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$

$$W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) = -C_1 D_2. \tag{20}$$

O caso $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ não é possível porque $W(x) = 0$.

No caso $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$, a função de Green é

$$G(x,y) \equiv \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(y)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b, \\ \\ \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b, \end{cases} \tag{21}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{C_1\left(x - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) C_2 \left(y - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{C_1 C_2 \left(b - a + \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1\alpha_1}\right)}, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b, \\ \\ \dfrac{C_1\left(y - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) C_2 \left(x - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{C_1 C_2 \left(b - a + \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1\alpha_1}\right)}, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b, \end{cases} \tag{22}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\left(x - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \left(y - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\left(b - a + \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1\alpha_1}\right)}, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b, \\ \\ \dfrac{\left(y - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \left(x - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\left(b - a + \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1\alpha_1}\right)}, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b, \end{cases} \tag{23}$$

No caso $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$,

$$G(x,y) \equiv \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(y)}{W(a)}, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b, \\ \\ \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{W(a)}, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b, \end{cases} \tag{24}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{D_1 C_2 \left(y - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{D_1 C_2}, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b, \\ \\ \dfrac{D_1 C_2 \left(x - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{D_1 C_2}, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b, \end{cases} \tag{25}$$

$$= \begin{cases} y - b - \dfrac{\beta_2}{\beta_1}, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b, \\ \\ x - b - \dfrac{\beta_2}{\beta_1}, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b, \end{cases} \tag{26}$$

E no caso $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$,

$$G(x,y) = \begin{cases} -x + a + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b, \\ \\ -y + a + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b, \end{cases} \tag{27}$$

---

2. (a) Determine a função de Green do seguinte problema de Sturm

$$u'' = f(x), \tag{28}$$

onde $u$ é definida no intervalo $x \in [0,1]$ e satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

---

É o problema anterior 1, com $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$. Então, a função de Green é

$$G(x, y) = \begin{cases} y - 1, & \text{para } a \leq x \leq y \leq b, \\ \\ x - 1, & \text{para } a \leq y \leq x \leq b, \end{cases} \tag{30}$$

$$= \frac{x + y + |x - y|}{2} - 1 \tag{31}$$

---

(b) Determine os auto-valores e auto-funções *normalizadas* do problema de Sturm-Liouville

$$u'' + \lambda u = 0, \tag{32}$$

onde $u$ é também definida no intervalo $x \in [0, 1]$ e satisfaz as mesmas condições de contorno 29.

---

Os autovalores e autofunções são soluções da equação

$$u_n'' = -\lambda_n u_n \tag{33}$$

e são

$$u_n(x) = e^{inx}, \tag{34}$$

$$\lambda_n = n^2 \tag{35}$$

Pode escolher também as combinações lineares dessas autofunções $\cos(nx)$ e $\text{sen}(nx)$. Cada autovalor $\lambda_n$ tem degeneração 2. Os condições de contorno selecionam um resultado único.

A função mais geral com autovetor $\lambda = n^2$ é

$$u_n(x) = A\cos(nx) + B\,\mathrm{sen}(nx) \tag{36}$$

$$u_n'(0) = An\,\mathrm{sen}(0) - Bn\cos(0) = 0 \tag{37}$$

$$\implies Bn = 0 \tag{38}$$

$$\implies u_n(x) = A\cos(nx) \tag{39}$$

$$u_n(1) = A\cos(n) = 0 \tag{40}$$

$$\implies n = (m - \frac{1}{2})\pi, \quad m \in \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \tag{41}$$

A condição de normalização é

$$\int_0^1 |u_n(x)|^2 dx = 1 \tag{42}$$

$$= A^2 \int_0^1 \cos^2\left[\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right)x\right] dx \tag{43}$$

$$= A^2 \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{sen}(2m\pi)}{\pi(1-2m)}\right) \tag{44}$$

$$= A^2 \frac{1}{2} \tag{45}$$

Então, os autofunções normalizadas são

$$u_m(x) = \sqrt{2}\cos\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi x\right], \quad m \in \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{46}$$

e os autovalores

$$\lambda_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \tag{47}$$

---

(c) Expresse a função de Green do problema de Sturm do item 2a em termos dos autovalores e auto-funções obtidas em 2b e, usando a expressão assim obtida, prove a seguinte identidade

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}. \tag{48}$$

---

$$G(x,y) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m(x)u_m(y)}{\lambda_m} \tag{49}$$
$$= -\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi x\right] \cos\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi y\right]}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2} \tag{50}$$
$$= \frac{x+y+|x-y|}{2} - 1 \tag{51}$$

No ponto $x = y = 0$, temos

$$G(0,0) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2} \tag{52}$$
$$= -\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{53}$$
$$= -\frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \tag{54}$$
$$= -1 \tag{55}$$
$$\implies \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \tag{56}$$

---

(d) Determine a solução do problema de Sturm do caso 2a para $f(x) = (3-x)e^x$. Use para tal a função de Green.

---

A solução é

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)dy \tag{57}$$
$$= \int_0^x G(x,y)f(y)dy + \int_x^1 G(x,y)f(y)dy \tag{58}$$
$$= \int_0^x (x-1)(3-y)e^y dy + \int_x^1 (y-1)(3-y)e^y dy \tag{59}$$
$$= e^x(5-x) - 4x + 4(1-e) \tag{60}$$

---

(e) Mostre explicitamente que a solução obtida no item 2d satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno desejadas.

---

$$u(x) = e^x(5-x) - 4x + 4(1-e) \tag{61}$$
$$u'(x) = e^x(5-x) - e^x - 4 \tag{62}$$
$$u''(x) = e^x(4-x) - e^x \tag{63}$$
$$= f(x) \tag{64}$$

As condições de contorno são:

$$u(1) = e^1(5-1) - 4 + 4(1-e) = 0 \tag{65}$$
$$u'(0) = e^0(4-0) - 4 = 0 \tag{66}$$

---

3. Determine explicitamente a função de Green para os seguintes problemas de Sturm:

   (a) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

   (b) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

   (c) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) + u'(1) = 0$.

   (d) $u'' + u = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

   (e) $(xu')' = f(x)$, com $u(1) = 0$, $u(e) = 0$.

---

(a) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

É o problema 1 com $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$. Então, a função de Green é

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left(x - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(y - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\left(b - a + \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1\alpha_1}\right)}, & \text{para } a \le x \le y \le b, \\ \\ \dfrac{\left(y - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(x - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\left(b - a + \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1\alpha_1}\right)}, & \text{para } a \le y \le x \le b, \end{cases} \tag{67}$$

$$= \begin{cases} x\,(y-1)\,, & \text{para } 0 \le x \le y \le 1, \\ \\ y\,(x-1)\,, & \text{para } 0 \le y \le x \le 1, \end{cases} \tag{68}$$

---

(b) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

É o problema 1 com $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$. Então, a função de Green é

$$G(x,y) = \begin{cases} -x + a + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, & \text{para } a \le x \le y \le b, \\ \\ -y + a + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, & \text{para } a \le y \le x \le b, \end{cases} \tag{69}$$

$$= \begin{cases} -x, & \text{para } 0 \le x \le y \le 1, \\ \\ -y, & \text{para } 0 \le y \le x \le 1, \end{cases} \tag{70}$$

---

(c) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) + u'(1) = 0$.

É o problema 1 com $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Então, a função de Green é

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left(x - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(y - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\left(b - a + \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1\alpha_1}\right)}, & \text{para } a \le x \le y \le b, \\ \\ \dfrac{\left(y - a - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(x - b - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\left(b - a + \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1\alpha_1}\right)}, & \text{para } a \le y \le x \le b, \end{cases} \tag{71}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x\,(y-2)}{2}, & \text{para } 0 \le x \le y \le 1, \\ \\ \dfrac{y\,(x-2)}{2}, & \text{para } 0 \le y \le x \le 1, \end{cases} \tag{72}$$

---

(d) $u'' + u = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

Para construir a função de Green, é necessário achar duas soluções da equação homogênea

$$u'' = -u. \tag{73}$$

com as condições de contorno

$$v_1(0) = 0 \tag{74}$$

$$v_2'(1) = 0 \tag{75}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$v_i(x) = A_i \cos(x) + B_i \operatorname{sen}(x) \tag{76}$$

As condições de contorno determine a relação entre coeficientes $A_i, B_i$

$$v_1(0) = A_1 = 0 \tag{77}$$

$$\Longrightarrow v_1(x) = B_1 \operatorname{sen}(x) \tag{78}$$

$$v_2'(1) = -A_2 \sin(1) + B_2 \cos(1) = 0 \tag{79}$$

$$\Longrightarrow v_2(x) = A_2 \left[\cos(x) + \tan(1) \operatorname{sen}(x)\right] \tag{80}$$

A função Wronskiana é

$$
\begin{aligned}
W(x) &= v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) && (81)\\
&= A_2B_1\left[\operatorname{sen}(x)\Big(-\operatorname{sen}(x)+\tan(1)\cos(x)\Big) - \Big(\cos(x)+\tan(1)\operatorname{sen}(x)\Big)\cos(x)\right] && (82)\\
&= A_2B_1\big[-\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)+\tan(1)\big(\cos(x)\operatorname{sen}(x)-\cos(x)\operatorname{sen}(x)\big)\big] && (83)\\
&= -A_2B_1 && (84)
\end{aligned}
$$

E a função de Green é

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(y)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a\le x\le y\le b,\\[2ex] \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a\le y\le x\le b,\end{cases} && (85)\\
&= \begin{cases} -\operatorname{sen}(x)\left[\cos(y)+\tan(1)\operatorname{sen}(y)\right], & \text{para } 0\le x\le y\le 1,\\[2ex] -\operatorname{sen}(y)\left[\cos(x)+\tan(1)\operatorname{sen}(x)\right], & \text{para } 0\le y\le x\le 1,\end{cases} && (86)
\end{aligned}
$$

---

(e) $(xu')' = f(x)$, com $u(1)=0$, $u(e)=0$.

Agora temos um operador de Liouville com $p(x)=x$.

A equação homogênea é

$$xv'' = -v' \qquad (87)$$

com solução geral

$$v'(x) = \frac{A}{x}v(x) \qquad = A\ln x + B. \qquad (88)$$

As condições de contorno para as soluções $v_i$ são

$$
\begin{aligned}
& v_1(1) = B_1 = 0 && (89)\\
\implies\ & v_1(x) = A_1 \ln x && (90)\\
& v_2(e) = A_2 + B_2 = 0 && (91)\\
\implies\ & v_2(x) = A_2(\ln x - 1) && (92)
\end{aligned}
$$

A função Wronskiana é

$$
\begin{aligned}
W(x) &= v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) && (93)\\
&= A_1A_2\left[\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x - 1}{x}\right] && (94)\\
&= \frac{A_1A_2}{x} && (95)
\end{aligned}
$$

A produto $pW$ é constante, como deve

$$
p(x)W(x) = x\frac{A_1A_2}{x} = A_1A_2 \tag{96}
$$

A função de Green é, então,

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(y)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \le x \le y \le b, \\ \\ \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \le y \le x \le b, \end{cases} && (97)\\
&= \begin{cases} \ln x(\ln y - 1), & \text{para } 1 \le x \le y \le e, \\ \\ \ln y(\ln x - 1), & \text{para } 1 \le y \le x \le e, \end{cases} && (98)
\end{aligned}
$$

---

4. Determine explicitamente a solução dos cinco problemas de Sturm acima 3 para o caso em que $f(x) = x$.

---

(a) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

A solução é

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_a^b G(x,y) f(y) dy && (99)\\
&= \int_0^x y(x-1) y dy + \int_x^1 x(y-1) y dy && (100)\\
&= (x-1)\frac{y^3}{3}\bigg|_0^x + x\frac{y^3}{3}\bigg|_x^1 - x\frac{y^2}{2}\bigg|_x^1 && (101)\\
&= \frac{x^3}{3}(x-1) + \frac{x}{3} - \frac{x^4}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2} && (102)\\
&= \frac{1}{6}(x^3 - x) && (103)
\end{aligned}
$$

---

(b) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

A solução é

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_a^b G(x,y) f(y) dy && (104)\\
&= -\int_0^x y y dy - \int_x^1 x y dy && (105)\\
&= -\frac{x^3}{3} - x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) && (106)\\
&= \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} && (107)
\end{aligned}
$$

---

(c) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) + u'(1) = 0$.

$$
G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,(y-2)}{2}, & \text{para } 0 \le x \le y \le 1, \\[2ex] \dfrac{y\,(x-2)}{2}, & \text{para } 0 \le y \le x \le 1, \end{cases} \tag{108}
$$

A solução é

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy \tag{109}$$
$$= \int_0^x \frac{y\,(x-2)}{2} ydy + \int_x^1 \frac{x\,(y-2)}{2} ydy \tag{110}$$
$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \tag{111}$$

---

(d) $u'' + u = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

A função de Green é

$$G(x,y) = \begin{cases} -\operatorname{sen}(x)\left[\cos(y) + \tan(1)\operatorname{sen}(y)\right], & \text{para } 0 \le x \le y \le 1, \\ \\ -\operatorname{sen}(y)\left[\cos(x) + \tan(1)\operatorname{sen}(x)\right], & \text{para } 0 \le y \le x \le 1, \end{cases} \tag{112}$$

A solução é

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy \tag{113}$$
$$= -\int_0^x \operatorname{sen}(y)\left[\cos(x) + \tan(1)\operatorname{sen}(x)\right] ydy \tag{114}$$
$$- \int_x^1 \operatorname{sen}(x)\left[\cos(y) + \tan(1)\operatorname{sen}(y)\right] ydy \tag{115}$$
$$= x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos 1} \tag{116}$$

---

(e) $(xu')' = f(x)$, com $u(1) = 0$, $u(e) = 0$.

A função de Green é

$$G(x,y) = \begin{cases} \ln x(\ln y - 1), & \text{para } 1 \le x \le y \le e, \\ \\ \ln y(\ln x - 1), & \text{para } 1 \le y \le x \le e, \end{cases} \tag{117}$$

A solução é

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_a^b G(x,y)f(y)dy && (118)\\
&= \int_1^x \ln y(\ln x - 1)ydy + \int_x^e \ln x(\ln y - 1)ydy && (119)\\
&= \frac{1}{4}\left[\ln x(1-e^2) + x^2 - 1\right] && (120)
\end{aligned}
$$

---

5. Determine explicitamente a função de Green para o seguinte problema de Sturm:

$$(xu')' - \frac{\mu^2}{x}u = f(x), \tag{121}$$

onde $\mu > 0$, com as condições de contorno com $u(a) = 0$ e $u(b) = 0$, onde $0 < a < b < \infty$.

Verifique que funções do tipo

$$v(x) = c_1 x^{\mu} + c_2 x^{-\mu}, \tag{122}$$

são soluções da equação homogênea e, com as mesmas, monte a função de Green.

A solução obtida vale também caso $a = 0$? Note que, nesse caso, a função $p(x) = x$ não é estritamente positiva no intervalo $[a, b]$.

---

É o problema de Sturm com $p(x) = x$ e $q(x) = -\mu^2/x$.

A equação homogênea é

$$(xu')' = \frac{\mu^2}{x}u \tag{123}$$

Inserindo a função $v(x)$ acima:

$$
\begin{aligned}
v(x) &= c_1 x^{\mu} + c_2 x^{-\mu} && (124)\\
v'(x) &= c_1 \mu x^{\mu-1} - c_2 \mu x^{-\mu-1} && (125)\\
\big(xv'(x)\big)' &= c_1 \mu^2 x^{\mu-1} + c_2 \mu^2 x^{-\mu-1} && (126)\\
&= \frac{\mu^2}{x}v(x) && (127)
\end{aligned}
$$

Então, a função $v(x)$ satisfaz a equação homogênea. Podemos achar as soluções $v_1$ e $v_2$ que satisfaz as condições de contorno

$$
\begin{aligned}
& v_1(a) = 0 && (128)\\
\implies & v_1(x) = C\left[x^\mu - a^{2\mu}x^{-\mu}\right] && (129)\\
& v_2(b) = 0 && (130)\\
\implies & v_1(x) = D\left[x^\mu - b^{2\mu}x^{-\mu}\right] && (131)
\end{aligned}
$$

A função Wronskiana é

$$
\begin{aligned}
W(x) &= v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) && (132)\\
&= CD\left(\left[x^\mu - a^{2\mu}x^{-\mu}\right]\frac{\mu}{x}\left[x^\mu + b^{2\mu}x^{-\mu}\right] - \left[x^\mu - b^{2\mu}x^{-\mu}\right]\frac{\mu}{x}\left[x^\mu + a^{2\mu}x^{-\mu}\right]\right) && (133)\\
&= 2CD\frac{\mu}{x}\left(b^{2\mu} - a^{2\mu}\right) && (134)
\end{aligned}
$$

O produto $pW$ é constante

$$
\begin{aligned}
p(x)W(x) &= x2CD\frac{\mu}{x}\left(b^{2\mu} - a^{2\mu}\right) && (135)\\
&= 2CD\mu\left(b^{2\mu} - a^{2\mu}\right). && (136)
\end{aligned}
$$

A função de Green é, então,

$$
G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(y)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \le x \le y \le b, \\[2em] \dfrac{v_1(y)v_2(x)}{p(a)W(a)}, & \text{para } a \le y \le x \le b, \end{cases} \tag{137}
$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{\left[x^\mu - a^{2\mu}x^{-\mu}\right]\left[y^\mu - y^{2b}y^{-\mu}\right]}{2\mu\left(b^{2\mu} - a^{2\mu}\right)}, & \text{para } a \le x \le y \le b, \\[2em] \dfrac{\left[x^\mu - b^{2\mu}x^{-\mu}\right]\left[y^\mu - y^{2a}y^{-\mu}\right]}{2\mu\left(b^{2\mu} - a^{2\mu}\right)}, & \text{para } a \le y \le x \le b, \end{cases} \tag{138}
$$

Caso $a = 0$, $p(x)$ não é positivo, e a problema é singular no ponto 0, e a solução não vale.

---

6. Uma partícula de massa $m > 0$ se move em uma dimensão sob um potencial

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \tag{139}$$

com $k > 0$ (potencial do oscilador harmônico). Além disso, a partícula está submetida a uma força externa $f(t)$ que, como a notação indica, pode variar com o tempo.

Suponha que se saiba que no instante de tempo $t_0 = 0$, a partícula encontra-se na posição $x(t_0) = 0$ e que no instante de tempo $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a partícula encontra-se novamente na posição $x(t_1) = 0$.

Determine a função de Green para o problema de Sturm associado ao problema mecânico acima e determine a trajetória $x(t)$ da partícula para $t \in [t_0, t_1]$ para os seguintes tipos de força:

(a) $f(t) = At$, para $A > 0$, constante e

(b) $f(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega t)$, para $B > 0$, constante.

---

A equação de movimento é

$$ma = m\ddot{x}(t) = -\frac{d}{dx}U(x) + f(t) \tag{140}$$

$$\implies mx''(t) + kx(t) = f(t) \tag{141}$$

É um problema de Sturm com $p = m$, $q = k$, e as condições de contorno

$$x(0) = 0 \tag{142}$$

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 0 \tag{143}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{144}$$

A equação homogênea é

$$mx_i''(t) + kx_i(t) = 0 \tag{145}$$

$$\implies x_i''(t) = -\omega^2 x_i(t) \tag{146}$$

com solução geral

$$x_i(t) = A_i \cos(\omega t) + B_i \operatorname{sen}(\omega t) \tag{147}$$

Para construir a função de Green, precisamos de soluções $x_1$ e $x_2$ que satisfazem as condições

$$\begin{aligned} x_1(0) &= A = 0 && (148)\\ \implies x_1(t) &= B_1 \operatorname{sen}(\omega t) && (149)\\ x_2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) &= A_2 = 0 && (150)\\ \implies x_2(t) &= A_2 \cos(\omega t) && (151) \end{aligned}$$

A determinante Wronskiana é

$$\begin{aligned} W(t) &= x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t) && (152)\\ &= A_2 B_1 \omega \left[-\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t) - \cos(\omega t)\cos(\omega t)\right] && (153)\\ &= -A_2 B_1 \omega && (154) \end{aligned}$$

A função de Green é,

$$G(t,t') = \begin{cases} \dfrac{x_1(t)x_2(t')}{p(t_0)W(t_0)}, & \text{para } t_0 \le t \le t' \le t_1, \\ \\ \dfrac{x_1(t')x_2(t)}{p(t_0)W(t_0)}, & \text{para } t_0 \le t' \le t \le t_1, \end{cases} \tag{155}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{m\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t'), & \text{para } 0 \le t \le t' \le \dfrac{\pi}{2\omega}, \\ \\ -\dfrac{1}{m\omega}\operatorname{sen}(\omega t')\cos(\omega t), & \text{para } 0 \le t' \le t \le \dfrac{\pi}{2\omega}, \end{cases} \tag{156}$$

A solução é

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^{t_1} G(t,t')f(t')dt' && (157)\\ &= -\frac{1}{m\omega}\cos(\omega t)\int_0^t \sin(\omega t')f(t')dt' - \frac{1}{m\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\int_t^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos(\omega t')f(t')dt' && (158) \end{aligned}$$

Para os casos:

(a) $f(t) = At$, para $A > 0$, constante

$$x(t) = -\frac{A}{m\omega}\cos(\omega t)\int_0^t \sin(\omega t')t'dt' - \frac{A}{m\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\int_t^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos(\omega t')t'dt' \tag{159}$$

$$= \frac{A}{m\omega^3}\cos(\omega t)\left[t\omega\cos(\omega t) - \operatorname{sen}(\omega t)\right] + \frac{A}{m\omega^3}\operatorname{sen}(\omega t)\left[\cos(\omega t) + t\omega\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\pi}{2}\right] \tag{160}$$

$$= \frac{A}{2m\omega^3}\left[2t\omega - \pi\operatorname{sen}(\omega t)\right] \tag{161}$$

(b) $f(t) = B\operatorname{sen}(\omega t)$, para $B > 0$, constante.

$$x(t) = -\frac{B}{m\omega}\cos(\omega t)\int_0^t \sin(\omega t')\operatorname{sen}(\omega t')dt' - \frac{B}{m\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\int_t^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos(\omega t')\operatorname{sen}(\omega t')dt' \tag{162}$$

$$= \frac{B}{m\omega}\cos(\omega t)\left[\frac{\operatorname{sen}(2\omega t)}{4\omega} - \frac{t}{2}\right] + \frac{B}{2\omega m}\operatorname{sen}(\omega t)\cos^2(\omega t) \tag{163}$$

$$= -\frac{B}{2m\omega}t\cos(\omega t) \tag{164}$$

---