Física Matemática II: Lista de Exercícios 4

Prazo: 8 Maio 2019

1. Determine a função de Green para o seguinte problema de Sturm:

$$u'' = f(x) \tag{1}$$

com

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \tag{2}$$
$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \tag{3}$$

com $x \in [a, b], a < b$.

Mostre que esse problema só tem solução se $(b - a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

2. (a) Determine a função de Green do seguinte problema de Sturm

$$u'' = f(x), \tag{4}$$

onde u é definida no intervalo $x \in [0, 1]$ e satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

(b) Determine os auto-valores e auto-funções *normalizadas* do problema de Sturm-Liouville

$$u'' + \lambda u = 0, \tag{6}$$

onde u é também definida no intervalo $x \in [0, 1]$ e satisfaz as mesmas condições de contorno 5.

(c) Expresse a função de Green do problema de Sturm do item 2a em termos dos auto-valores e auto-funções obtidas em 2b e, usando a expressão assim obtida, prove a seguinte identidade

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}. \tag{7}$$

(d) Determine a solução do problema de Sturm do caso 2a para $f(x) = (3-x)e^x$. Use para tal a função de Green.

(e) Mostre explicitamente que a solução obtida no item 2d satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno desejadas.

3. Determine explicitamente a função de Green para os seguintes problemas de Sturm:

   (a) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

   (b) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

   (c) $u'' = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u(1) + u'(1) = 0$.

   (d) $u'' + u = f(x)$, com $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

   (e) $(xu')' = f(x)$, com $u(1) = 0$, $u(e) = 0$.

4. Determine explicitamente a solução dos cinco problemas de Sturm acima 3 para o caso em que $f(x) = x$.

5. Determine explicitamente a função de Green para o seguinte problema de Sturm:

$$(xu')' - \frac{\mu^2}{x}u = f(x), \tag{8}$$

onde $\mu > 0$, com as condições de contorno com $u(a) = 0$ e $u(b) = 0$, onde $0 < a < b < \infty$.

Verifique que funções do tipo

$$v(x) = c_1 x^{\mu} + c_2 x^{-\mu}, \tag{9}$$

são soluções da equação homogênea e, com as mesmas, monte a função de Green.

A solução obtida vale também caso $a = 0$? Note que, nesse caso, a função $p(x) = x$ não é estritamente positiva no intervalo $[a, b]$.

6. Uma partícula de massa $m > 0$ se move em uma dimensão sob um potencial

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \tag{10}$$

com $k > 0$ (potencial do oscilador harmônico). Além disso, a partícula está submetida a uma força externa $f(t)$ que, como a notação indica, pode variar com o tempo.

Suponha que se saiba que no instante de tempo $t_0 = 0$, a partícula encontra-se na posição $x(t_0) = 0$ e que no instante de tempo $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a partícula encontra-se novamente na posição $x(t_1) = 0$.

Determine a função de Green para o problema de Sturm associado ao problema mecânico acima e determine a trajetória $x(t)$ da partícula para $t \in [t_0, t_1]$ para os seguintes tipos de força:

(a) $f(t) = At$, para $A > 0$, constante e

(b) $f(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega t)$, para $B > 0$, constante.