# **Soluções:**
# FisMat II Exercicios 3

Prazo: ~~3~~ 5 Abril 2019

1. Considere o problema de determinar a solução da equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t) = 0, \tag{1}$$

com a condição $y(0) = y_0$ (assuma que as funções $a$ e $b$: $\mathbb{R} \to$ são contínuas). Demonstre que sua solução é

$$y(t) = \frac{1}{p(t)} \left[ y_0 - \int_0^t p(s)b(s)ds \right], \tag{2}$$

onde

$$p(t) \equiv \exp\left( \int_0^t a(\tau)d\tau \right) \tag{3}$$

---

Note que $\dot{p}(t) = p(t)a(t)$. Então, a derivada de $y$ é

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \frac{1}{p(t)^2} \left[ p(t)\left(-p(t)b(t)\right) - \dot{p}(t)\left( y_0 - \int_0^t p(s)b(s)ds \right) \right] && (4) \\
&= -b(t) - a(t)\left( y_0 - \int_0^t p(s)b(s)ds \right) && (5) \\
&= -b(t) - a(t)y(t) && (6) \\
\implies \dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t) &= -b(t) - a(t)y(t) + a(t)y(t) + b(t) = 0 && (7)
\end{aligned}$$

---

2. A equação diferencial ordinária não-linear, homogênea, da primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 = 0, \tag{8}$$

é denominada *equação de Bernoulli.* Assuma que as funções $a$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são contínuas.

(a) Prove que a solução dessa equação com a condição inicial $y(0) = y_0$ é dada por

$$y(t) = \frac{y_0}{p(t)\left(1 + y_0 \int_0^t b(s)p(s)^{-1}ds\right)}, \tag{9}$$

onde $p$ é também dada por (3).

*Sugestão*: defina $v(t) = 1/y(t)$ e mostre que $v$ satisfaz uma equação diferencial linear de primeira ordem como a do exercício 1.

(b) Justifique a existência e a unicidade de solução com base no Teorema de Picard-Lindelöf.

(c) Pode haver uma circunstância na qual a solução (9) existe apenas durante um intervalo finito após $t = 0$?

---

(a) Podemos derivar a equação da $v(t)$:

$$\begin{aligned}
v(t) &\equiv \frac{1}{y(t)} && (10)\\
\dot{v}(t) &= -y(t)^{-2}\dot{y}(t) && (11)\\
\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 &= 0 && (12)\\
\implies y(t)^{-2}\dot{y}(t) + a(t)y(t)^{-1} + b(t) &= 0 && (13)\\
-\dot{v}(t) + a(t)v(t) + b(t) &= 0 && (14)\\
\dot{v}(t) - a(t)v(t) - b(t) &= 0 && (15)
\end{aligned}$$

É a mesma equação de (1) com $a \to -a$ e $b \to -b$ (e então $p \to 1/p$). A solução é

$$v(t) = p(t)\left[v_0 + \int_0^t b(s)p(s)^{-1}ds\right], \tag{16}$$

onde $v_0 = v(t = 0) = 1/y_0$.

Então, temos

$$y(t) = \frac{1}{v(t)} \tag{17}$$

$$= \frac{1}{p(t)\left(\frac{1}{y_0} + \int_0^t b(s)p(s)^{-1}ds\right)} \tag{18}$$

$$= \frac{y_0}{p(t)\left(1 + y_0\int_0^t b(s)p(s)^{-1}ds\right)}. \tag{19}$$

(b) A equação pode ser escrito

$$\dot{y}(t) = f\big(t, y(t)\big) \tag{20}$$

$$y(t_0 = 0) = y_0 \tag{21}$$

com

$$f\big(t, y(t)\big) = -a(t)y(t) - b(t)y(t)^2. \tag{22}$$

Uma condução necessária é que $f$ seja Lipschitz-contínua na segunda variável num intervalo $\mathcal{R} : |t| \le A, |y - y_0| \le B$:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le k|x-y|, \qquad k \ge 0 \tag{23}$$

$$= \big|a(x-y) + b(x^2 - y^2)\big| \tag{24}$$

$$\implies |a(t) + b(t)(x+y)| \le k, \qquad \forall (t,x),(t,y) \in \mathcal{R} \tag{25}$$

Uma condição suficiente para que a condição de Lipschitz acima se cumpra é que $\partial_y f(t,y)$ exista em todo o intervalo $\mathcal{R}$ e lá seja limitada, em cujo caso a constante de Lipschitz seria dada por

$$k \equiv \sup_{(t,y)\in\mathcal{R}} |\partial_y f(t,y)| \tag{26}$$

$$= \sup_{(t,y)\in\mathcal{R}} |2b(t)y + a(t)|. \tag{27}$$

Neste caso, existe uma única solução no intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ com

$$\beta \equiv \min \left\{ A, \frac{B}{C} \right\}. \tag{28}$$

$$C \equiv \sup_{(t,x)\in\mathcal{R}} ||f(t,x)|| \tag{29}$$

Quando $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$, ambas condições são satisfeitos para qualquer valor de $B$, com $k = |2(B + |y_0|)\sup b + \sup a|$.

(c) Se $b(t)$ ou $a(t)$ diverge a um tempo $t'$, a condição de Lipschitz não for satisfeita. Uma solução única é garantido somente até o tempo $t = \beta = t'$.

---

3. Determine a solução geral da equação de Bernoulli generalizada

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^n = 0, \tag{30}$$

$n \neq 1$.

*Sugestão*: Define $w$ por $y(t) = w(t)^{\frac{1}{1-n}}$ e proceda como acima

---

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^n = 0 \tag{31}$$

$$\Longrightarrow\ y(t)^{-n}\dot{y}(t) + a(t)y(t)^{1-n} + b(t) = 0 \tag{32}$$

$$w(t) \equiv y(t)^{1-n} \tag{33}$$

$$\dot{w}(t) = (1-n)y(t)^{-n}\dot{y}(t) \tag{34}$$

$$\Longrightarrow\ \dot{w}(t) + (1-n)a(t)w(t) + (1-n)b(t) = 0 \tag{35}$$

A solução é então,

$$w(t) = \frac{1}{p(t)}\left[w_0 - (1-n)\int_0^t p(s)b(s)ds\right], \tag{36}$$

onde

$$p(t) \equiv \exp\left((1-n)\int_0^t a(\tau)d\tau\right), \tag{37}$$

$$w_0 = y_0^{1-n} \tag{38}$$

Então,

$$y(t) = w(t)^{\frac{1}{1-n}} \tag{39}$$

$$= p(t)^{\frac{-1}{1-n}} \left[ y_0^{1-n} - (1-n) \int_0^t p(s) b(s) ds \right]^{\frac{1}{1-n}} \tag{40}$$

---

4. Considere a equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0, \tag{41}$$

onde $a$, $b$, e $c$ são constantes reais satisfazendo $b^2 \neq 4ac$ e $a \neq 0$.

Essa equação pode ser resolvida pelo seguinte método (devido a Euler). Admitamos uma solução do tipo

$$x(t) = e^{\lambda t}. \tag{42}$$

(a) Mostre que para

$$\lambda = \lambda_\pm \equiv \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{43}$$

a equação (41) é satisfeita.

(b) Mostre então que a solução geral da equação diferencial (41) é

$$x(t) = a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- e^{\lambda_- t}, \tag{44}$$

onde $a_\pm$ são constantes.

(c) Determine $a_\pm$ para as condições iniciais $x(0) = X_0$, $\dot{x}(0) = V_0$.

Para $X_0 \neq 0$ mas $V_0 = 0$ faça gráficos de $x(t)$ para os casos em que

(d) $b^2 > 4ac$

(e) $b^2 < 4ac$

Se você estiver curioso em saber o que ocorre se $b^2 = 4ac$, saiba que nesse caso $\lambda_+ =$

$\lambda_- = -b/(2a)$ e a solução geral é do tipo

$$x(t) = a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- t e^{\lambda_+ t}. \tag{45}$$

(f) Verifique que essa expressão é de fato solução da equação (41) no caso $b^2 = 4ac$.

---

(a)

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{46}$$

$$\lambda = \lambda_\pm \equiv \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{47}$$

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \tag{48}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 x(t) \tag{49}$$

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = x(t)\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0 \tag{50}$$

Ou $x(t) = 0$ ou $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Então $x_\pm(t) = e^{\lambda_\pm t}$ são soluções.

(b) A equação é linear. Então, qualquer combinação linear de soluções é também uma solução.

(c)

$$x(0) = a_+ + a_- = X_0 \tag{51}$$

$$\dot{x}(0) = a_+\lambda_+ + a_-\lambda_- = V_0 \tag{52}$$

$$\implies a_+ = \frac{V_0 - \lambda_- X_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \tag{53}$$

$$a_- = \frac{-V_0 + \lambda_+ X_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \tag{54}$$

$$\tag{55}$$

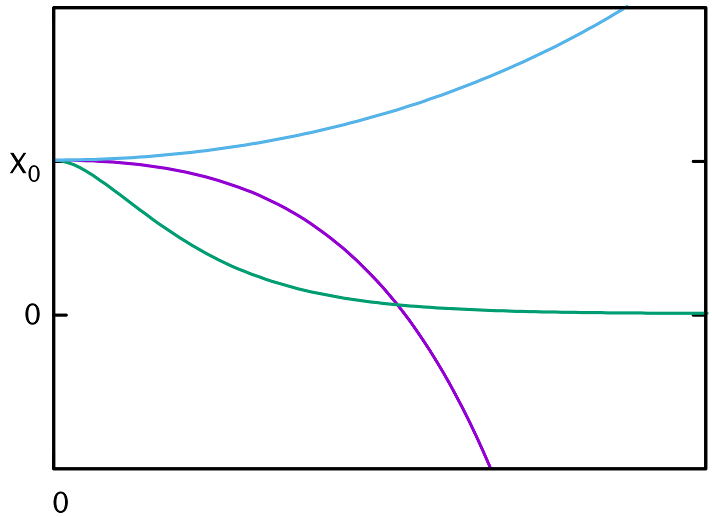
(d) Para $b^2 > 4ac$, $\lambda_-$ e $\lambda_-$ são reais.

A $t = 0$, o valor é $x(0) = X_0$ e a inclinação é $\dot{x}(0) = V_0 = 0$. As tempos grandes, o comportamento é $\sim e^{\lambda_{\max} t}$, com

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_+, \lambda_-), \tag{56}$$

que pode ser positivo ou negativo.

Gráficos possíveis são:




(e) Para $b^2 < 4ac$, $\lambda_-$ e $\lambda_-$ são complexos.

Então, $x(t)$ deve ser também complexo e o comportamento é oscilante.

Quando $b = 0$, o argumento é puramente imaginário e a solução é puramente oscilante para todo tempo (com uma mistura de 2 frequências).

Quando $b \neq 0$, o argumento tem um parte real, e a amplitude das oscilações é proporcional a $e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}$. I.e.,

$$x(t) \sim e^{\mathrm{Re}\lambda_{\max} t} e^{i \cdot \mathrm{Im}\lambda_{\max} t} \tag{57}$$

(f) No caso $b^2 = 4ac$. podemos verificar a solução. Ja sabemos que o primeiro termo é uma solução para qualquer $a, b, c$. Então, é necessário que o segundo termo sozinho é também uma solução.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_+e^{\lambda_+ t} + a_- te^{\lambda_+ t} && (58)\\
&\equiv a_+x_+(t) + a_-x_-(t) && (59)\\
\dot{x}_+(t) &= e^{\lambda_+ t}(1 + t\lambda_+) && (60)\\
\ddot{x}_+(t) &= e^{\lambda_+ t}(\lambda_+ + \lambda_+ + t\lambda_+^2) && (61)\\
a\ddot{x}_+(t) + b\dot{x}_+(t) + cx_+(t) &= e^{\lambda_+ t}\left[a(2\lambda_+ + t\lambda_+^2) + b(1 + t\lambda_+) + c\right] && (62)\\
&= e^{\lambda_+ t}\left[a(2\frac{-b}{2a} + t\frac{b^2}{4a^2}) + b(1 + t\frac{-b}{2a}) + tc\right] && (63)\\
&= e^{\lambda_+ t}\left[-b + t\frac{b^2}{4a} + b + t\frac{-b^2}{2a} + t\frac{b^2}{4a}\right] && (64)\\
&= 0 && (65)
\end{aligned}
$$

Então, qualquer combinação linear 58 é também uma solução.

---

5. Seja a equação diferencial ordinária linear de ordem $n$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t). \tag{66}$$

Determine o sistema linear de $n$ equações de primeira ordem equivalente e mostre que o mesmo pode ser escrito na forma matricial

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + B(t), \tag{67}$$

onde

$$Y(t) \equiv \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{68}$$

e $A(t)$ é a matriz $n \times n$

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{69}$$

---

A equação é equivalente ao sistema linear de $n$ equações de primeira ordem:

$$y^{(1)}(t) = \partial_t y(t) \tag{70}$$
$$y^{(2)}(t) = \partial_t y^{(1)}(t) \tag{71}$$
$$y^{(3)}(t) = \partial_t y^{(2)}(t) \tag{72}$$
$$\vdots \tag{73}$$
$$y^{(n)}(t) = \partial_t y^{(n-1)}(t) \tag{74}$$
$$f(t) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m y^{(m)}(t) = y^n(t) \tag{75}$$

Estas $n$ equações são os $n$ componentes de:

$$B(t) + A(t)Y(t) = \dot{Y}(t) \tag{76}$$

---

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{77}$$

a qual é relevante para o problema do oscilador harmônico clássico unidimensional (adote acima $\omega_0 > 0$ e $\gamma > 0$). Mostre que a mesma é diagonalizável se e somente se $\gamma \neq 2\omega_0$. Determine nesse caso ($\gamma \neq 2\omega_0$) seus autovalores e seus projetores espectrais e, usando a representação espectral de $A$ determine explicitamente $e^{tA}, t \in \mathbb{R}$.

Com base nesses resultados apresente a solução explícita do problema de valor inicial $\ddot{x}(t) +$

$\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$, com $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$.

---

A matriz é diagonalizável se e somente se tem 2 autovetores linearmente independentes.

A equação de autovetores $V$ e autorvalores $\lambda$ é

$$
\begin{aligned}
A \cdot V &= \lambda V && (78)\\
\implies (A - \lambda \mathbb{1}) \cdot V &= 0 && (79)\\
\implies \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= 0 && (80)\\
&= \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} \right| && (81)\\
&= \lambda^2 + \lambda\gamma + \omega_0^2 && (82)\\
\implies \lambda_\pm &= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} && (83)
\end{aligned}
$$

Os autovetores são

$$
\begin{aligned}
A \cdot V &= \begin{pmatrix} V_2 \\ -\omega_0^2 V_1 - \gamma V_2 \end{pmatrix} && (84)\\
&= \lambda \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} && (85)\\
\implies V_2 &= \lambda V_1 && (86)
\end{aligned}
$$

Então, os autovetores (não-normalizados) são

$$
V_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix} \tag{87}
$$

Quando $\gamma \neq 2\omega_0$, são linearmente independentes e a matriz é diagonalizável:

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} && (88)\\
P^{-1}AP &= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ -\lambda_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} && (89)\\
&= \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} && (90)
\end{aligned}
$$

Os projetores espectrais são

$$
\begin{aligned}
E_+ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} && (91)\\
&= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ \lambda_+\lambda_- & -\lambda_+ \end{pmatrix} && (92)\\
E_- &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} && (93)\\
&= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} -\lambda_+ & 1 \\ -\lambda_+\lambda_- & \lambda_- \end{pmatrix} && (94)
\end{aligned}
$$

tal que

$$
\begin{aligned}
A &= \lambda_+ E_+ + \lambda_- E_- && (95)\\
\sum E_i E_j &= \delta_{ij} E_i && (96)
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
e^{tP^{-1}AP} &= P^{-1} e^{tA} P && (97)\\
&= \begin{pmatrix} e^{t\lambda_+} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_-} \end{pmatrix} && (98)\\
e^{tA} &= PP^{-1} e^{tA} PP^{-1} && (99)\\
&= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_+} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ -\lambda_+ & 1 \end{pmatrix} && (100)\\
&= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- e^{t\lambda_+} - \lambda_+ e^{t\lambda_-} & e^{t\lambda_-} - e^{t\lambda_+} \\ \lambda_-\lambda_+ \left[ e^{t\lambda_+} - e^{t\lambda_-} \right] & \lambda_- e^{t\lambda_-} - \lambda_+ e^{t\lambda_+} \end{pmatrix} && (101)
\end{aligned}
$$

Ou, equivalentemente

$$
\begin{aligned}
e^{iA} &= e^{t \sum \lambda_i E_i} && (102)\\
&= e^{t\lambda_+} E_+ + e^{t\lambda_-} E_- && (103)
\end{aligned}
$$

O problema de valor inicial pode ser escrito

$$x^{(1)}(t) = \partial_t x(t) \tag{104}$$
$$-\omega_0 x^{(1)}(t) - \gamma x(t) = \partial_t x^{(1)}(t) \tag{105}$$

ou

$$\partial_t \begin{pmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \end{pmatrix} \tag{106}$$
$$\dot{X}(t) = AX(t) \tag{107}$$

onde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \tag{108}$$
$$\Longrightarrow \quad X(t) = e^{tA} X(0) \tag{109}$$
$$= \left( e^{t\lambda_+} E_+ + e^{t\lambda_-} E_- \right) X(0) \tag{110}$$
$$= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- e^{t\lambda_+} - \lambda_+ e^{t\lambda_-} & e^{t\lambda_-} - e^{t\lambda_+} \\ \lambda_- \lambda_+ \left[ e^{t\lambda_+} - e^{t\lambda_-} \right] & \lambda_- e^{t\lambda_-} - \lambda_+ e^{t\lambda_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{111}$$
$$\Longrightarrow \quad x(t) = \frac{x_0 \left( \lambda_- e^{t\lambda_+} - \lambda_+ e^{t\lambda_-} \right) + v_0 \left( e^{t\lambda_-} - e^{t\lambda_+} \right)}{\lambda_- - \lambda_+} \tag{112}$$
$$= \frac{e^{t\lambda_+} \left( x_0 \lambda_- - v_0 \right) - e^{t\lambda_-} \left( x_0 \lambda_+ - v_0 \right)}{\lambda_- - \lambda_+} \tag{113}$$

---

7. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial complexo $(n+1)$-dimensional de todos os polinômios complexos de grau menor ou igual a $n$. Seja $D = \frac{d}{dx}$ o operador de derivação agindo em $\mathcal{P}$.

   (a) Expresse $D$ como uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ agindo na base $\{e_0, \ldots, e_n\}$, onde $e_k = x^k/k!$.

   (b) Mostre que a matriz que representa $D$ é nilpotente.

   (c) Expresse $\exp(tD), t \in \mathbb{R}$, como matriz na mesma base.

   (d) Seja $p(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n$ um elemento de $\mathcal{P}_n$. Mostre que

$$\left( e^{tD} p \right)(x) = p(x+t). \tag{114}$$

*Sugestão*: Mostre que isso é verdade para cada elemento da base $\{e_0, \ldots, e_n\}$, onde $e_k = x^k/k!$.

---

(a)

$$\frac{d}{dx}e_0 = 0 \tag{115}$$

Para $k > 0$,

$$\frac{d}{dx}e_k = \frac{kx^{k-1}}{k!} = e_{k-1} \tag{116}$$

$$\implies D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{117}$$

(b)

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{118}$$

$$\vdots \tag{119}$$

$$D^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{120}$$

$$\implies D^n = 0 \tag{121}$$

(c)

$$e^{tD} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tD)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{t^m D^m}{m!} \tag{122}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{123}$$

(d) Num elemento da base

$$e^{tD} e_k = \left[ \sum_{m=0}^{k} \frac{t^m}{m!} \frac{d^m}{dx^m} \right] \frac{x^k}{k!} \tag{124}$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{t^m}{m!} e_{k-m} \tag{125}$$

$$= e_k + t e_{k-1} + \frac{t}{2} e_{k-2} \ldots + \frac{t^k}{k!} e_0 \tag{126}$$

$$= \left( \frac{t^k}{k!}, \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \ldots, t, 1, 0, \ldots, 0 \right) \tag{127}$$

É exatamente como uma mudança de base

$$x \to x + t \implies e_k = \frac{x^k}{k!} \to \frac{(x+t)^k}{k!} \tag{128}$$

$$= \frac{x^k}{k!} + t \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{t^2}{2} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} x + \frac{t^k}{k!} \tag{129}$$

$$= \left( \frac{t^k}{k!}, \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \ldots, t, 1, 0, \ldots, 0 \right) \tag{130}$$

$$\implies \left( e^{tD} p \right)(x) = p(x+t). \tag{131}$$

---

8. As chamadas *matrizes de Pauli* são definidas por

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{132}$$

(a) Mostre que as mesmas satisfazem as seguintes relações algébricas: para todos $a, b = 1, 2, 3$ valem

$$[\sigma_a, \sigma_b] \equiv \sigma_a\sigma_b - \sigma_b\sigma_a = 2i\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c, \tag{133}$$

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} \equiv \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}\mathbb{1}, \tag{134}$$

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1} + i\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c. \tag{135}$$

(b) Mostre que as quatro matrizes $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ formam uma base em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2)$: toda matriz complexa $2 \times 2$ pode ser escrita como uma combinação linear das mesmas.

(c) Obtenha a representação espectral das matrizes de Pauli.

(d) Seja $\vec{\eta} \equiv (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ um vetor de comprimento 1 de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $||\vec{\eta}|| = 1$. Seja, $\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma} \equiv \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3$, onde $\sigma_k$ são as matrizes de Paulo, definidas acima. Prove que

$$\exp\left(i\theta\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}\right) = \cos(\theta)\mathbb{1} + i\,\mathrm{sen}(\theta)\left(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}\right). \tag{136}$$

*Sugestão*: Obtenha a decomposição espectral de $\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$ e use-a para determinar $\exp\left(i\theta\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}\right)$.

(e) Determine a solução da equação diferencial

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H\Psi(t), \tag{137}$$

onde $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $t \in \mathbb{R}$, e onde $H \equiv B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3$, sendo que os $B_i$'s são constantes reais. A condição inicial é $\Psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

---

(a) Pode verificar explicitamente

(b) Uma combinação linear das matrizes pode ser escrito como

$$\lambda_0\mathbb{1} + \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_3 & \lambda_1 - i\lambda_2 \\ \lambda_1 + i\lambda_2 & \lambda_0 - \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{138}$$

onde $\{\lambda_i\}$ são números complexos.

Uma matriz complexa 2×2 arbitrária pode ser escrito como

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \tag{139}$$

ou

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} C = \frac{C_{11}+C_{22}}{2} \tag{140}$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} \sigma_1 C = \frac{C_{12}+C_{21}}{2} \tag{141}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} \sigma_2 C = i\frac{C_{12}-C_{21}}{2} \tag{142}$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} \sigma_3 C = \frac{C_{11}-C_{22}}{2} \tag{143}$$

Então, qualquer matriz pode ser escrito como uma combinação linear das quatro matrizes.

(c) Todos as matizes de Pauli tem autovalores $\lambda_\pm = \pm 1$:

$$\det(\sigma_i - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - 1 = 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\} \tag{144}$$

Os autovetores (normalizados) são

$$\sigma_i V_\pm = \pm V_\pm \tag{145}$$
$$\implies V_{1\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \tag{146}$$
$$V_{2\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \tag{147}$$
$$V_{3+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{148}$$
$$V_{3-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{149}$$
$$\tag{150}$$

e temos

$$P_i = \begin{pmatrix} V_{i+} & V_{i-} \end{pmatrix} \tag{151}$$

$$\sigma_i = E_{i+} - E_{i-} \tag{152}$$

$$= P_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_i^{-1} - P_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_i^{-1} \tag{153}$$

Com

$$E_{1\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{154}$$

$$E_{2\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix} \tag{155}$$

$$E_{3+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{156}$$

$$E_{3-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{157}$$

e

$$E_{a+}E_{a+} = E_{a-}E_{a-} = \mathbb{1} \tag{158}$$

$$E_{a+}E_{a-} = E_{a-}E_{a+} = 0 \tag{159}$$

(d) Uma maneira de mostrar é:

$$
\begin{aligned}
(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^2 &= \sum_{a,b=1}^{3} \eta_a\eta_b\sigma_a\sigma_b && (160)\\
&= \sum_{a,b=1}^{3} \eta_a\eta_b \left[\delta_{ab}\mathbb{1} + i\sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}\sigma_c\right] && (161)\\
&= |\vec{\eta}|^2\mathbb{1} + i\sum_{a,b,c=1}^{3}\eta_a\eta_b\epsilon_{abc}\sigma_c && (162)\\
&= |\vec{\eta}|^2\mathbb{1} = \mathbb{1} && (163)\\
\Longrightarrow\ (\vec{\eta}\cdot\sigma)^{2p} &= \mathbb{1}, \quad \forall p = 0,1,2,3,\ldots && (164)\\
(\vec{\eta}\cdot\sigma)^{2q+1} &= \vec{\eta}\cdot\sigma, \quad \forall q = 0,1,2,3,\ldots && (165)\\
\exp\left(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\theta^k(\hat{\eta}\cdot\sigma)^k && (166)\\
&= \mathbb{1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\theta^{2p} + i(\vec{\eta}\cdot\sigma)\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{(2q+1)!}\theta^{2q+1} && (167)\\
&= \mathbb{1}\cos(\theta) + i(\vec{\eta}\cdot\sigma)\,\mathrm{sen}(\theta) && (168)
\end{aligned}
$$

Ou, pode usar a representação espectral de $(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})$

$$
\begin{aligned}
\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} &= \lambda_+E'_+ + \lambda_-E'_- && (169)\\
&= E'_+ - E'_- && (170)\\
E'_+ &= \frac{1}{2}(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} + \mathbb{1}) && (171)\\
E'_- &= -\frac{1}{2}(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} - \mathbb{1}) && (172)
\end{aligned}
$$

ou, melhor, a representação espectral de $(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})$

$$i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} = i\theta E_{+} - i\theta E_{-} \tag{173}$$
$$E_{+} = i\theta\frac{1}{2}(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} + \mathbb{1}) \tag{174}$$
$$E_{-} = -i\theta\frac{1}{2}(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} - \mathbb{1}) \tag{175}$$
$$\implies \exp\left(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right) = e^{i\theta}E_{+} + e^{-i\theta}E_{-} \tag{176}$$
$$= \cos(\theta)(E_{+} + E_{-}) + i\,\mathrm{sen}(\theta)(E_{+} - E_{-}) \tag{177}$$
$$= \cos(\theta)\mathbb{1} + i\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma} \tag{178}$$

(e)

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H\Psi(t) \tag{179}$$
$$\implies \Psi(t) = e^{-iH}\Psi(0) \tag{180}$$
$$= \exp\left(-i\vec{B}\cdot\vec{\sigma}\right)\Psi(0) \tag{181}$$
$$= \exp\left(-i|\vec{B}|\hat{B}\cdot\vec{\sigma}\right)\Psi(0) \tag{182}$$
$$= \left[\cos(|\vec{B}|)\mathbb{1} - i\,\mathrm{sen}(|\vec{B}|)\hat{B}\cdot\vec{\sigma}\right]\Psi(0) \tag{183}$$
$$= \cos(|\vec{B}|)\Psi(0) - i\,\mathrm{sen}(|\vec{B}|)\hat{B}\cdot\vec{\sigma}\Psi(0) \tag{184}$$

onde

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} \tag{185}$$
$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \tag{186}$$