Física Matemática II: Lista de Exercícios 3

Prazo: ~~3~~ 8 Abril 2019

1. Considere o problema de determinar a solução da equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t) = 0, \tag{1}$$

com a condição $y(0) = y_0$ (assuma que as funções a e b: $\mathbb{R} \to$ são contínuas). Demonstre que sua solução é

$$y(t) = \frac{1}{p(t)}\left[y_0 - \int_0^t p(s)b(s)ds\right], \tag{2}$$

onde

$$p(t) \equiv \exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right) \tag{3}$$

2. A equação diferencial ordinária <u>não-linear</u>, homogênea, da primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 = 0, \tag{4}$$

é denominada *equação de Bernoulli*. Assuma que as funções a e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são contínuas.

   (a) Prove que a solução dessa equação com a condição inicial $y(0) = y_0$ é dada por

$$y(t) = \frac{y_0}{p(t)\left(1 + y_0 \int_0^t b(s)p(s)^{-1}ds\right)}, \tag{5}$$

   onde p é também dada por (3).

   Sugestão: defina $v(t) = 1/y(t)$ e mostre que v satisfaz uma equação diferencial linear de primeira ordem como a do exercício 1.

   (b) Justifique a existência e a unicidade de solução com base no Teorema de Picard-Lindelöf.

(c) Pode haver uma circunstância na qual a solução (5) existe apenas durante um intervalo finito após $t = 0$?

3. Determine a solução geral da equação de Bernoulli generalizada

$$\dot{y}(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^n = 0, \tag{6}$$

$n \neq 1$.

Sugestão: Define w por $y(t) = w(t)^{\frac{1}{1-n}}$ e proceda como acima

4. Considere a equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0, \tag{7}$$

onde a, b, e c são constantes reais satisfazendo $b^2 \neq 4ac$ e $a \neq 0$.

Essa equação pode ser resolvida pelo seguinte método (devido a Euler). Admitamos uma solução do tipo

$$x(t) = e^{\lambda t}. \tag{8}$$

(a) Mostre que para

$$\lambda = \lambda_\pm \equiv \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{9}$$

a equação (7) é satisfeita.

(b) Mostre então que a solução geral da equação diferencial (7) é

$$x(t) = a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- e^{\lambda_- t}, \tag{10}$$

onde $a_\pm$ são constantes.

(c) Determine $a_\pm$ para as condições iniciais $x(0) = X_0$, $\dot{x}(0) = V_0$.

Para $X_0 \neq 0$ mas $V_0 = 0$ faça gráficos de $x(t)$ para os casos em que

(d) $b^2 > 4ac$

(e) $b^2 < 4ac$

Se você estiver curioso em saber o que ocorre se $b^2 = 4ac$, saiba que nesse caso $\lambda_+ = \lambda_- = -b/(2a)$ e a solução geral é do tipo

$$x(t) = a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- t e^{\lambda_+ t}. \tag{11}$$

(f) Verifique que essa expressão é de fato solução da equação (7) no caso $b^2 = 4ac$.

5. Seja a equação diferencial ordinária linear de ordem n

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = f(t). \tag{12}$$

Determine o sistema linear de n equações de primeira ordem equivalente e mostre que o mesmo pode ser escrito na forma matricial

$$\dot{Y}(t) = A(t) Y(t) + B(t), \tag{13}$$

onde

$$Y(t) \equiv \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{14}$$

e $A(t)$ é a matriz $n \times n$

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{15}$$

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{16}$$

a qual é relevante para o problema do oscilador harmônico clássico unidimensional (adote acima $\omega_0 > 0$ e $\gamma > 0$). Mostre que a mesma é diagonalizável se e somente se $\gamma \neq 2\omega_0$. Determine nesse caso ($\gamma \neq 2\omega_0$) seus autovalores e seus projetores espectrais e, usando a representação espectral de A determine explicitamente $e^{tA}, t \in \mathbb{R}$.

Com base nesses resultados apresente a solução explícita do problema de valor inicial $\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$, com $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$.

7. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial complexo $(n+1)$-dimensional de todos os polinômios complexos de grau menor ou igual a n. Seja $D = \frac{d}{dx}$ o operador de derivação agindo em $\mathcal{P}$.

   (a) Expresse D como uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ agindo na base $\{e_0, \ldots, e_n\}$, onde $e_k = x^k/k!$.

   (b) Mostre que a matriz que representa D é nilpotente.

   (c) Expresse $\exp(tD), t \in \mathbb{R}$, como matriz na mesma base.

   (d) Seja $p(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n$ um elemento de $\mathcal{P}_n$. Mostre que

$$\left(e^{tD}p\right)(x) = p(x+t). \tag{17}$$

   Sugestão: Mostre que isso é verdade para cada elemento da base $\{e_0, \ldots, e_n\}$, onde $e_k = x^k/k!$.

8. As chamadas *matrizes de Pauli* são definidas por

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

   (a) Mostre que as mesmas satisfazem as seguintes relações algébricas: para todos $a, b = 1, 2, 3$ valem

$$[\sigma_a, \sigma_b] \equiv \sigma_a\sigma_b - \sigma_b\sigma_a = 2i\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c, \tag{19}$$

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} \equiv \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}\mathbb{1}, \tag{20}$$

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1} + i\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c. \tag{21}$$

   (b) Mostre que as quatro matrizes $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ formam uma base em $\mathrm{Mat}(\mathbb{C}, 2)$: toda matriz complexa 2×2 pode ser escrita como uma combinação linear das mesmas.

(c) Obtenha a representação espectral das matrizes de Pauli.

(d) Seja $\vec{\eta} \equiv (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ um vetor de comprimento 1 de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $||\vec{\eta}|| = 1$. Seja, $\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma} \equiv \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3$, onde σ_k são as matrizes de Paulo, definidas acima. Prove que

$$\exp\left(i\theta\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}\right) = \cos(\theta)\mathbb{1} + i\,\mathrm{sen}(\theta)\left(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}\right). \tag{22}$$

Sugestão: Obtenha a decomposição espectral de $\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}$ e use-a para determinar $\exp\left(i\theta\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}\right)$.

(e) Determine a solução da equação diferencial

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H\Psi(t), \tag{23}$$

onde $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $t \in \mathbb{R}$, e onde $H \equiv B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3$, sendo que os B_i's são constantes reais. A condição inicial é $\Psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_1(t)^0 \\ \psi_2(t)^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.