Soluções:
FisMat II Exercicios 1

Prazo: 20 Março 2019

1. Use o Teorema de Ponto Fixo de Banach para mostrar que, em $[0, 1]$, a equação $x = \cos(x)$ tem uma e somente uma solução no intervalo. Qual é ela, aproximadamente? Use para tal o método iterativo sugerido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach e estime o error após 50 iterações.

A função

$$T(x) = \cos(x) \tag{1}$$

é uma contração em referência a métrica $d(x, y) = |x - y|$.

Primeiramente, verificamos que $T(x)$ mapa $[0, 1]$ em $[0, 1]$. Note que $\cos(x)$ é decrescente em $[0, 1]$ e $\cos(1) \simeq 0.54 \implies T([0, 1]) \in [\cos(1), 1] \subset [0, 1]$.

$$\begin{aligned} d[T(x), T(y)] &= |\cos(x) - \cos(y)| && (2)\\ &= \left| \int_x^y \mathrm{sen}(t) dt \right| && (3)\\ &= \int_x^y |\mathrm{sen}(t)|\, dt && (4)\\ &\leq \mathrm{sen}(1)|x - y| && (5)\\ &\simeq 0.84|x - y| && (6) \end{aligned}$$

$$d(x_n, x_f) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0) \tag{7}$$

Após 50 interações:

$$
\begin{aligned}
d(x_{50}, x_f) &\leq \frac{q^{50}}{1-q} d(x_1, x_0) && (8)\\
&\simeq \frac{\mathrm{sen}(1)^{50}}{1-\mathrm{sen}(1)} d(x_1, x_0) && (9)\\
&\simeq 10^{-3} d(x_1, x_0) && (10)
\end{aligned}
$$

Exemplos:

$$x_0 = 0 \implies d(x_1, x_0) = d(\cos(0), 0) = 1 \tag{11}$$

$$x_0 = 1 \implies d(x_1, x_0) = d(\cos(1), 1) \simeq 0.46 \tag{12}$$

Então o error após 50 iterações é menor de 10^{-3}.

Vamos agora tratar de mostrar algumas aplicações das equações integrais de Volterra à resolução de problemas (muito frequentamente encontrados em Física) envolvendo equações diferenciais de segunda ordem com certas condições iniciais dadas.

Para tal, faremos uso da seguinte identidade, válida para qualquer função ϕ que seja pelo menos duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$:

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} (t - t')\ddot{\phi}(t')dt'. \tag{13}$$

2. Prove essa identidade (13).
   Sugestão: use as identidades

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{\phi}(t')dt' \tag{14}$$

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t'} \ddot{\phi}(t'')dt'' \tag{15}$$

e use integração por partes.

Integrando por partes

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} (t - t')\ddot{\phi}(t')dt' \tag{16}$$

$$= \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0) + \Big[(t - t')\dot{\phi}(t')\Big]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \Big[-\dot{\phi}(t')\Big]\, dt' \tag{17}$$

$$= \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0) + 0 - (t - t_0)\dot{\phi}(t_0) + \phi(t) - \phi(t_0) \tag{18}$$

$$= \phi(t) \tag{19}$$

---

3. Para ilustrar o uso que podemos fazer da identidade (13), vamos considerar a bem conhecida *equação do pêndulo simples*,

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,[\theta(t)] \tag{20}$$

(para $g > 0$ e $l > 0$, constantes) com condições iniciais $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. Substituindo o lado direito em (13) temos

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{l}\int_{0}^{t} (t - t')\,\mathrm{sen}\,[\theta(t')]\, dt', \tag{21}$$

que é uma equação integral de Volterra não-linear para θ.

Constate que o núcleo dessa equação integral

$$K(t, t', z) = -\frac{g}{l}(t - t')\,\mathrm{sen}(z) \tag{22}$$

satisfaz a condição de Lipschitz na terceira variável para t e t' contidos em qualquer intervalo finito $[-T, T]$, $0 < T < \infty$.

Conclua disso que a equação do pêndulo simples, com as condições iniciais dadas, tem solução única em qualquer intervalo finito $[-T, T]$, $0 < T < \infty$.

$$|K(t,t',z') - K(t,t',z)| = \frac{g}{l}|t-t'|\,|\text{sen}(z') - \text{sen}(z)| \tag{23}$$

$$= \frac{g}{l}|t-t'|\left|\int_z^{z'} \cos(x)dx\right| \tag{24}$$

$$\leq \frac{g}{l}|t-t'||z'-z| = M|z'-z| \tag{25}$$

para $M = |t-t'|g/l$.

---

4. Calcule as duas primeiras aproximações para a solução da equação integral (20) seguindo o procedimento iterativo sugerido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Tome como ponto de partida a função identicamente nula: $\theta_0(t) \equiv 0$. Você consegue, olhando o resultado do cômputo das duas primeiras aproximações, interpretar fisicamente o que elas representam?

A aplicação T é

$$T(\theta)(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{l}\int_0^t (t-t')\,\text{sen}\,[\theta(t')]\,dt', \tag{26}$$

Então, a sequência é

$$\theta_n(t) = T(\theta_{n-1})(t) \tag{27}$$

Com $\theta_0(t) = 0$, temos

$$\theta_1(t) = T(\theta_0)(t) \tag{28}$$

$$= \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{l}\int_0^t (t-t')\,\text{sen}\,[0]\,dt' \tag{29}$$

$$= \theta_0 + \omega_0 t \tag{30}$$

$$\theta_2(t) = T(\theta_1)(t) \tag{31}$$

$$= \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{l}\int_0^t (t-t')\,\text{sen}\,[\theta_0 + \omega_0 t']\,dt' \tag{32}$$

$$= \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{l\omega_0^2}\left[t\omega_0\cos(\theta_0) + \text{sen}(\theta_0) - \text{sen}(\theta_0 + \omega_0 t)\right] \tag{33}$$

Para t pequeno ($\omega_0 t \ll \theta_0$)

$$\theta_2(t) \simeq \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{2l}\operatorname{sen}(\theta_0)t^2 + O(t^3) \tag{34}$$

Parece uma séria em tempo t.

---

5. Seja a conhecida equação do pêndulo simples no limite de pequenas oscilações:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\theta(t), \tag{35}$$

com condições iniciais $\theta(0) = \phi_0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. Usando (13) transforme-a em uma equação integral de Volterra e resolva-a pelo método iterativo, tomando como ponto de partida a função identicamente nula: $\theta_0(t) \equiv 0$. Para tal, determine a n-ésima iterada θ_n exatamente e mostre que a mesma converge a uma certa combinação linear de $\cos(\omega t)$ e $\operatorname{sen}(\omega t)$, onde $\omega = \sqrt{g/l}$. Para tal você precisará lembrar-se da série de Taylor dos funções sen e cos.

Podemos usar Eq. (20) de novo:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{l}\int_0^t (t-t')\theta(t')dt' \tag{36}$$

$$\theta_n(t) = T(\theta_{n-1})(t). \tag{37}$$

Define $\omega = \sqrt{g/l}$. Usando $\theta_0(t) = 0$:

$$\theta_1(t) = \theta_0 + \omega_0 t \tag{38}$$

$$\theta_2(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \omega^2 \int_0^t (t-t')\left(\theta_0 + \omega_0 t\right) \tag{39}$$

$$= \theta_0 + \omega_0 t - \omega^2 \left[\theta_0 \frac{t^2}{2} + \omega_0 \frac{t^3}{6}\right] \tag{40}$$

$$\theta_3(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \omega^2 \int_0^t (t-t')\left(\theta_0 + \omega_0 t' - \frac{1}{2}\omega^2\theta_0 t'^2 - \frac{1}{6}\omega^2\omega_0 t'^3\right)dt' \tag{41}$$

$$= \theta_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\omega^2\theta_0 t^2 - \frac{1}{6}\omega^2\omega_0 t^3 + \frac{1}{2}\omega^4\theta_0\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}\omega^4\omega_0\frac{1}{20}t^5 \tag{42}$$

$$\implies \theta_n(t) = \sum_{m=0}^{n+2}\theta'_m t^m, \tag{43}$$

onde os coeficientes θ'_m não dependem de n. Podemos ver que tem uma relação de recorrência.

$$\theta'_m = -t^{-m}\omega^2\theta'_{m-2}\int_0^t (t-t')t'^{m-2}dt' \tag{44}$$

$$= -\omega^2\theta'_{m-2}\frac{1}{m(m-1)} \tag{45}$$

Com $\theta'_0 = \theta_0$ e $\theta'_1 = \omega_0$, podemos gerar todo coeficiente (par e impar).:

$$\theta'_{2m} = \theta_0\omega^{2m}\prod_{m'=1}^{m}\frac{-1}{2m'(2m'-1)} \tag{46}$$

$$= \theta_0\omega^{2m}\frac{(-1)^m}{(2m)!} \tag{47}$$

$$\theta'_{2m+1} = \omega_0\omega^{2m}\prod_{m'=1}^{m}\frac{-1}{(2m'+1)2m'} \tag{48}$$

$$= \omega_0\omega^{2m}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \tag{49}$$

$$\implies \theta_{2n}(t) = \sum_{m=0}^{n}\theta'_{2m}t^{2m} + \sum_{m=0}^{n-1}\theta'_{2m+1}t^{2m+1} \tag{50}$$

$$= \theta_0\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(\omega t)^{2m}}{(2m)!} + \frac{\omega_0}{\omega}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{(\omega t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \tag{51}$$

$$\theta_{2n+1}(t) = \theta_0\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(\omega t)^{2m}}{(2m)!} + \frac{\omega_0}{\omega}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(\omega t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \tag{52}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\theta_n(t) = \theta_0\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(\omega t)^{2m}}{(2m)!} + \frac{\omega_0}{\omega}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(\omega t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \tag{53}$$

$$= \theta_0\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{54}$$
