Física Matemática II: Lista de Exercícios 2

Prazo: 20 Março 2019

1. Use o Teorema de Ponto Fixo de Banach para mostrar que, em $[0, 1]$, a equação $x = \cos(x)$ tem uma e somente uma solução no intervalo. Qual é ela, aproximadamente? Use para tal o método iterativo sugerido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach e estime o error após 50 iterações.

Vamos agora tratar de mostrar algumas aplicações das equações integrais de Volterra à resolução de problemas (muito frequentamente encontrados em Física) envolvendo equações diferenciais de segunda ordem com certas condições iniciais dadas.

Para tal, faremos uso da seguinte identidade, válida para qualquer função ϕ que seja pelo menos duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$:

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} (t - t')\ddot{\phi}(t')dt'. \tag{1}$$

2. Prove essa identidade (1).
Sugestão: use as identidades

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{\phi}(t')dt' \tag{2}$$

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t'} \ddot{\phi}(t'')dt'' \tag{3}$$

e use integração por partes.

3. Para ilustrar o uso que podemos fazer da identidade (1), vamos considerar a bem conhecida *equação do pêndulo simples*,

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}[\theta(t)] \tag{4}$$

(para $g > 0$ e $l > 0$, constantes) com condições iniciais $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. Substituindo o lado direito em (1) temos

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{g}{l}\int_0^t (t - t')\,\mathrm{sen}\,[\theta(t')]\,dt', \tag{5}$$

que é uma equação integral de Volterra não-linear para θ.

Constate que o núcleo dessa equação integral

$$K(t, t', z) = -\frac{g}{l}(t - t')\,\mathrm{sen}(z) \tag{6}$$

satisfaz a condição de Lipschitz na terceira variável para t e t' contidos em qualquer intervalo finito $[-T, T]$, $0 < T < \infty$.

Conclua disso que a equação do pêndulo simples, com as condições iniciais dadas, tem solução única em qualquer intervalo finito $[-T, T]$, $0 < T < \infty$.

4. Calcule as duas primeiras aproximações para a solução da equação integral (4) seguindo o procedimento iterativo sugerido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Tome como ponto de partida a função identicamente nula: $\theta_0(t) \equiv 0$. Você consegue, olhando o resultado do cômputo das duas primeiras aproximações, interpretar fisicamente o que elas representam?

5. Seja a conhecida equação do pêndulo simples no limite de pequenas oscilações:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\theta(t), \tag{7}$$

com condições iniciais $\theta(0) = \phi_0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. Usando (1) transforme-a em uma equação integral de Volterra e resolva-a pelo método iterativo, tomando como ponto de partida a função identicamente nula: $\theta_0(t) \equiv 0$. Para tal, determine a n-ésima iterada θ_n exatamente e mostre que a mesma converge a uma certa combinação linear de $\cos(\omega t)$ e $\mathrm{sen}(\omega t)$, onde $\omega = \sqrt{g/l}$. Para tal você precisará lembrar-se da série de Taylor dos funções sen e cos.