Soluções:
FisMat II Exercicios 1

Prazo: 8 Março 2019

1. Mostre que as condições de simetria e de positividade do métrico são consequência da desigualdade triangular e da supisão que $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$, e então só tem duas condições independentes de métricos.

   Quer dizer, assumindo as duas propriedades seguintes de espaços métricos

   - $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$, para todos x, y
   - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$, para todos x, y, z

   mostre que

   (a) $d(x, y) = d(y, x)$

   (b) $d(x, y) \geq 0$

(a) A desigualdade é válido para todos y

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall \ y \tag{1}$$

Escolhamos $y = x$:

$$\Longrightarrow \ d(x, z) \leq \cancel{d(x, x)} + d(z, x) \ \forall \ x, z \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Trocando-se $x \leftrightarrow z$

$$\Longrightarrow \ d(z, x) \leq d(x, z) \tag{4}$$

Então

$$\implies d(z,x) = d(x,z) \tag{5}$$

(b) Usando este resultado, podemos escrever

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{6}$$

$$\implies d(x,y) \geq d(x,z) - d(y,z) \tag{7}$$

Trocando-se x por y:

$$d(x,y) = d(y,x) \geq d(y,z) - d(x,z) \tag{8}$$

Eqs. (7) e (8) dizem que

$$d(x,y) \geq |d(y,z) - d(x,z)| \tag{9}$$

$$\implies d(x,y) \geq 0 \tag{10}$$

---

2. Seja M um conjunto não-vazio e considere a seguinte função d_t: $M \times M \to \mathbb{R}$, dada por

$$d_t(x,y) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases} \tag{11}$$

Mostre que d_t uma métrica em M, denominada *métrica trivial*

- $d(x,x) = 0$: Condição de distância nula
  É verdade por definição
- Se $x \neq y$ então $d(x,y) > 0$: Positividade
  $d_t(x,y) = 1 > 0$ para $x \neq y$
- $d(x,y) = d(y,x)$: Simetria
  Também por definição
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$: Desigualdade triangular
  Casos:

  (a) $x = y = z$: $0 \leq 0 + 0$

(b) $x = y \neq z$: $1 \leq 0 + 1$

(c) $x \neq y = z$: $1 \leq 1 + 0$

(d) $x = z \neq y$: $0 \leq 1 + 1$

(e) Todos desiguais: $1 \leq 1 + 1$

---

3. Seja $M = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em $[0,1]$. Considere a seguinte função d_∞: $M \times M \to \mathbb{R}$:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \tag{12}$$

Mostre que d_∞ uma métrica em M.

- $d(f,f) = 0$: ✓
- Se $f \neq g$ então $d(f,g) > 0$
  Se $f \neq g$, tem ao menus um ponto x onde $f(x) \neq g(x)$ e então $d > 0$ ✓
- $d(f,g) = d(f,g)$:
  O valor absoluto é simétrico ✓
- $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$: Desigualdade triangular (desigualdade do triângulo)

$$-\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq f(x) \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \forall x \in [0,1] \tag{13}$$

$$-\sup_{x\in[0,1]} |g| \leq g(x) \leq \sup_{x\in[0,1]} |g| \tag{14}$$

$$\implies -\left[\sup_{x\in[0,1]} |f| + \sup_{x\in[0,1]} |g|\right] \leq f(x) + g(x) \leq \left[\sup_{x\in[0,1]} |f| + \sup_{x\in[0,1]} |g|\right] \tag{15}$$

$$\implies |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f| + \sup_{x\in[0,1]} |g| \tag{16}$$

$$\implies \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f| + \sup_{x\in[0,1]} |g| \tag{17}$$

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g|| \tag{18}$$

$$\implies d(x,z) = ||x - z|| = ||(x - y) + (y - z)|| \tag{19}$$

$$\leq ||x - y|| + ||y - z|| = d(x,y) + d(x,z) \tag{20}$$

✓

4. Seja $M = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em $[0,1]$. Considere a seguinte função $d_1\colon M \times M \to \mathbb{R}$:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \tag{21}$$

Mostre que d_1 uma métrica em M.

As primeiras 3 condições são triviais de novo. A desigualdade de triângulo é provado como o exemplo anterior

$$-\int_0^1 |f(x)|dx \leq f(x) \leq \int_0^1 |f(x)|dx, \quad \forall x \in [0,1] \tag{22}$$

$$-\int_0^1 |g|dx \leq g(x) \leq \int_0^1 |g|dx \tag{23}$$

$$\implies -\left[\int_0^1 |f|dx + \int_0^1 |g|dx\right] \leq f(x) + g(x) \leq \left[\int_0^1 |f|dx + \int_0^1 |g|dx\right] \tag{24}$$

$$\implies |f(x) + g(x)| \leq \int_0^1 |f|dx + \int_0^1 |g|dx \tag{25}$$

$$\implies \int_0^1 |f(x) + g(x)|dx \leq \int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x')|dx' + \int_0^1 |g(x')|dx'\right] dx \tag{26}$$

$$\int_0^1 |f(x) + g(x)|dx \leq \int_0^1 |f|dx + \int_0^1 |g|dx \tag{27}$$

$$\implies d(f,g) = ||f - h|| = ||(f-g) + (g-f)|| \tag{28}$$

$$\leq ||f - g|| + ||g - h|| = d(f,g) + d(g,h) \tag{29}$$

---

5. Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial complexo dotado de uma métrica d. Mostre que para que a métrica d seja uma métrica induzida por uma norma é *necessário e suficiente* supor que d satisfaz as seguintes condições:

   (a) Invariância translacional: $d(u+t, v+t) = d(u,v)$ para todos u, v e $t \in \mathcal{E}$

   (b) Transformação de escala: $d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha| d(u,v)$ para todos $u, v \in \mathcal{E}$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$

   Sugestão: Prove que sob as hipóteses (a) e (b), a expressão $||u|| \equiv d(u,0)$ com $u \in \mathcal{E}$, define uma norma em $\mathcal{E}$ e mostre que essa é a norma que induz a métrica d.

A primeira condição implica que

$$d(u+t, v+t) = d(u,v) \tag{30}$$
$$\implies d(u,v) = f(u-v), \tag{31}$$

onde $f(u)$ é uma função que transforma um vetor para um número real, $f : M \to \mathbb{R}$.

A segunda implica que

$$\begin{aligned} d(\alpha u, \alpha v) &= |\alpha| d(u,v) \\ = f(\alpha(u-v)) &= |\alpha| f(u-v) \end{aligned} \tag{32}$$

$f(u)$ é uma norma $f(u) = ||u||$ se satisfizer

$$u \neq 0 \implies ||u|| \neq 0 \tag{33}$$
$$||\alpha \cdot u|| = |\alpha| \cdot ||u|| \tag{34}$$
$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v|| \tag{35}$$

Um métrica tem a propriedade

$$u \neq v \implies d(u,v) > 0 \tag{36}$$

que implica Eq. (33).

Eq. (32) implica eq. (34).

Uma métrica satisfaz a desigualdade

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{37}$$
$$\implies f(x-z) \leq f(x-y) + f(y-z) \tag{38}$$
$$f((u-t)-(v-t)) \leq f((u-t)-t) + f(t-(v-t)) \tag{39}$$
$$\implies f(u-v) = f(u) + f(t) \tag{40}$$

e Eq. (35) é satisfeito.

Então 5a e 5b implica que $f(u)$ é uma norma. Também são necessários para satisfazer Eqs. (34) e (35)

6. Seja r um número racional com $r > 1$. Prove que a sequência de números racionais $s_n = \sum_{a=0}^{n} \frac{1}{r^a}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy e que a mesma converge ao número racional $\frac{r}{r-1}$.
Sugestão: prove primeiramente que $s_n = (r - r^{-n})/(r-1)$ e use esse fato.

O termo s_n da sequência pode ter escrito

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{a=0}^{n} \frac{1}{r^a} && (41)\\ &= 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n} && (42)\\ rs_n &= r + 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} && (43)\\ \implies rs_n - s_n &= r - \frac{1}{r^n} && (44)\\ \implies s_n &= \frac{r - r^{-n}}{r-1} && (45) \end{aligned}$$

Considere dois termos da sequência s_i, s_j com $j > i$. A distância entre os termos é

$$d(s_j, s_i) = |s_j - s_i| \tag{46}$$

Como $r > 1$, a sequência é crescente e

$$\begin{aligned} d(s_j, s_i) &= s_j - s_i && (47)\\ &= \sum_{a=0}^{j} \frac{1}{r^a} - \sum_{a=0}^{i} \frac{1}{r^a} && (48)\\ &= \frac{r - r^{-j}}{r-1} - \frac{r - r^{-i}}{r-1} && (49)\\ &= \frac{r^{-i} - r^{-j}}{r-1} && (50)\\ &= \frac{1 - r^{-(j-i)}}{r^i(r-1)} && (51) \end{aligned}$$

Esta distância pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando-se i grande, fica provando que a sequência s_n é de Cauchy.

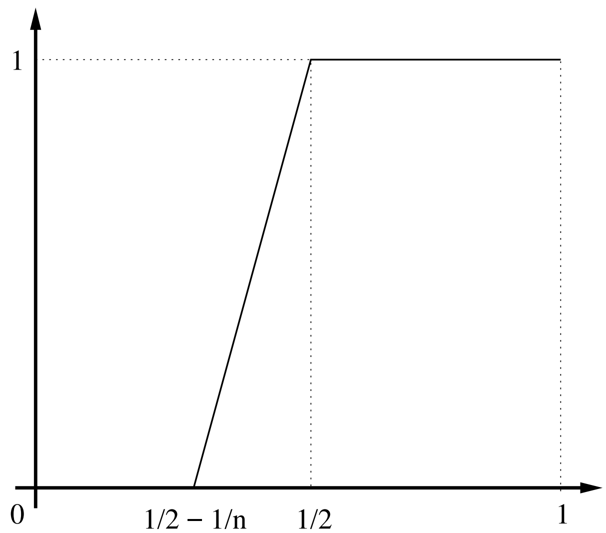

Figure 1: Gráfico das funções f_n

O limite é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r - r^{-n}}{r-1} = \frac{r}{r-1}, \tag{52}$$

um número racional (lembra-se que r é racional).

---

7. Vamos mostrar que $C([0,1])$, o conjunto das funções contínuas (reais ou complexas) definidas no intervalo [0,1], não é completo em relação à métrica d_1:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \tag{53}$$

Considere a seguinte sequência de funções contínuas em $[0,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}], \\ n(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}), & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{54}$$

onde $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Vide Figura 1.

(a) Convença-se essas funções são todas contínuas e, portanto, elementos de $C([0,1])$

(b) Calcule $d_1(f_n, f_m)$ e mostre que a sequência f_n é uma sequência de Cauchy em relação à métrica d_1.

(c) As funções f_n valem 1 no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Fora isso, para cada $x \in [0, \frac{1}{2})$ vale $f_n(x) = 0$ para todo n suficientemente grande. Convença-se que essas fatos implicam que se existir uma função f tal que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx = 0$ então f deve ser da forma

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{55}$$

(a menos, eventualmente, do ponto $x = 1/2$, onde pode estar indefinida) pois de outro modo ter-se-ia $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \neq 0$. Calcule $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx$ e mostre explicitamente que o limite dessa integral é zero quando $n \to \infty$. Como f não é contínua e, portanto, $C([0, 1])$ não é um espaço métrico completo em relação à métrica d_1.

(a) Os três segmentos são contínuos. Nos pontos entre os segmentos:

$$\lim_{x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^-} f(x) = 0 = \lim_{x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^+} f(x) \tag{56}$$

$$\lim_{x=\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = 1 = \lim_{x=\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) \tag{57}$$

$\implies f(x)$ é contínua.

(b) Considere $m > n$

$$d_1(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx \tag{58}$$

$$= \int_0^1 f_n(x) - f_m(x)dx \tag{59}$$

$$= \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2}\right) \tag{60}$$

$$= \frac{m-n}{2(m+n)} \tag{61}$$

Pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando-se n grande $\implies$ s_n é de Cauchy.

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0 \tag{62}$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{63}$$

mas $f(x)$ não é contínua, e o limite não existe em $C([0,1])$.

---

8. Seja M um espaço métrico com uma métrica $d(x,y), x, y \in M$. Prove que

$$d_0(x,y) \equiv \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \tag{64}$$

também define uma métrica em M. Sugestão: para demonstrar a desigualdade triangular pode ser útil provar antes que a função

$$l(x) = \frac{x}{1+x} \tag{65}$$

é crescente na região $x \geq 0$.

$$d(x,x) = 0 \implies d_0(x0x = \frac{0}{1+0} = 0)\checkmark \tag{66}$$
$$x \neq y \implies d(x,y) > 0 \tag{67}$$
$$\implies d_0(x,y) > 0\checkmark \tag{68}$$
$$d(x,y) = d(y,x) \implies d_0(x,y) = d_0(y,z)\checkmark \tag{69}$$

Para demonstrar a desigualdade triangular, note que

$$\frac{d}{dx}l(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0,\ \forall x \geq 0. \tag{70}$$

Então, d_0 é crescente em d e:

$$
\begin{align}
d_0(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \tag{71}\\
&\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \tag{72}\\
&= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \tag{73}\\
&\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \tag{74}\\
&= d_0(x,y) + d_0(y,z) \tag{75}
\end{align}
$$

---

9. Os itens abaixo ilustram situações úteis de se ter em mente concernentes à propriedade de completeza.

   (a) Mostre que $M_1 \equiv (0,1)$ não é completo na métrica definida por $d(x,y) \equiv |x-y|$. Para tal, mostre que $a_n \equiv 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ é uma sequência de Cauchy em $M_1 = (0,1)$ em relação à essa métrica, mas mostre que essa sequência não converge nesse conjunto, ou seja, mostre que não existe $x \in M_1$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x,a_n) = 0$.

   (b) Mostre que $M_2 \equiv [0,1]$ é completo na mesma métrica $d(x,y) \equiv |x-y|$. Pode usar o fato que $\mathbb{R}$ é completo nessa métrica.

   (c) Mostre que $d_I(x,y) \equiv \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ define uma métrica em $M_3 \equiv [1,\infty)$.

   (d) Mostre que $M_3 = [1,\infty)$ é completo na métrica $d(x,y) \equiv |x-y|$ mas não na métrica $d_I(x,y)$. Para o primeiro caso, pode usar o fato que $\mathbb{R}$ é completo na métrica d. Para esse último caso, mostre que $a_n \equiv n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em M_3 em relação à métrica d_I, mas que essa sequência não converge nesse conjunto, ou seja, mostre que não existe $x \in M_3$ tal que $\lim_{n\to\infty} d_I(x,a_n) = 0$

(a) $d(a_m,a_n)$ com $m > n$ é

$$
\begin{align}
d(a_m,a_n) &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \tag{76}\\
&= \frac{m-n}{mn} \tag{77}
\end{align}
$$

$d \to 0$ para n grande. $\implies$ é de Cauchy.

Porém, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, que não é em M_1.

(b) $\mathbb{R}$ é completo nessa métrica, então todos as sequências de Cauchy em $\mathbb{R}$ convergem. Um subespaço fechado de um espaço completo é também completo. M_2 é um subespaço fechado de $\mathbb{R}$. O subconjunto de sequências de Cauchy com todos os termos em M_2 tem o limite que também é em M_2 por que os pontos de fronteira (0 e 1) são incluídos.

(c) d_I tem todos as propriedades necessários:

$$
\begin{aligned}
d(x,x) &= |1-1| = 0 \quad \checkmark && (78)\\
n \neq y \implies d(x,y) &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| > 0 \quad \checkmark && (79)\\
d(x,y) &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = d(y,x) \quad \checkmark && (80)\\
d(x,z) &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| && (81)\\
&= \left|\frac{z-x}{xz}\right| = \frac{1}{xz}|z-x| && (82)\\
&= \frac{1}{xz}\left|(z - \frac{xz}{y}) + (\frac{xz}{y} - x)\right| && (83)\\
&\leq \frac{1}{xz}\left|(z - \frac{xz}{y})\right| + \frac{1}{xz}\left|(\frac{xz}{y} - x)\right| && (84)\\
&= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| && (85)\\
\implies d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \quad \checkmark && (86)
\end{aligned}
$$

(d) M_3 é um subespaço fechado de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ é completo em d, então M_3 é também completo em d.

Não é completo em d_I. Considere a sequência $a_n = n$. Com $m > n \in \mathbb{N}$:

$$d_I(a_n, a_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \tag{87}$$

Para grande n ambos termos vão para 0, e também a diferença. Então (a_n) é de Cauchy. Porém, não tem um limite da sequência $(\lim\limits_{n\to\infty} n)$ em M_3 (nem em $\mathbb{R}$).