Física Matemática II: Lista de Exercícios 1

Prazo: 8 Março 2019

- Disponível no site do curso: `http://matt.luzum.org/Home/fm2019`

1. Mostre que as condições de simetria e de positividade do métrico são consequência da desigualdade triangular e da supisão que $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$, e então só tem duas condições independentes de métricos.

   Quer dizer, assumindo as duas propriedades seguintes de espaços métricos

   - $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$, para todos x, y
   - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$, para todos x, y, z

   mostre que

   (a) $d(x, y) = d(y, x)$

   (b) $d(x, y) \geq 0$

2. Seja M um conjunto não-vazio e considere a seguinte função d_t: $M \times M \to \mathbb{R}$, dada por

$$d_t(x, y) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases} \tag{1}$$

   Mostre que d_t uma métrica em M, denominada *métrica trivial*

3. Seja $M = C([0, 1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$. Considere a seguinte função d_∞: $M \times M \to \mathbb{R}$:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \tag{2}$$

   Mostre que d_∞ uma métrica em M.

4. Seja $M = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em $[0,1]$. Considere a seguinte função d_1: $M \times M \to \mathbb{R}$:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \tag{3}$$

Mostre que d_1 uma métrica em M.

5. Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial complexo dotado de uma métrica d. Mostre que para que a métrica d seja uma métrica induzida por uma norma é *necessário e suficiente* supor que d satisfaz as seguintes condições:

   (a) Invariância translacional: $d(u+t, v+t) = d(u,v)$ para todos u, v e $t \in \mathcal{E}$

   (b) Transformação de escala: $d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha| d(u,v)$ para todos $u, v \in \mathcal{E}$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$

   Sugestão: Prove que sob as hipóteses (a) e (b), a expressão $||u|| \equiv d(u,0)$ com $u \in \mathcal{E}$, define uma norma em $\mathcal{E}$ e mostre que essa é a norma que induz a métrica d.

6. Seja r um número racional com $r > 1$. Prove que a sequência de números racionais $s_n = \sum_{a=0}^{n} \frac{1}{r^a}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy e que a mesma converge ao número racional $\frac{r}{r-1}$ com a métrica usual

$$d(x,y) = |x - y| \tag{4}$$

   Sugestão: prove primeiramente que $s_n = (r - r^{-n})/(r-1)$ e use esse fato.

7. Vamos mostrar que $C([0,1])$, o conjunto das funções contínuas (reais ou complexas) definidas no intervalo [0,1], não é completo em relação à métrica d_1:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \tag{5}$$

   Considere a seguinte sequência de funções contínuas em $[0,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}], \\ n(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}), & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{6}$$

   onde $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Vide Figura 1.

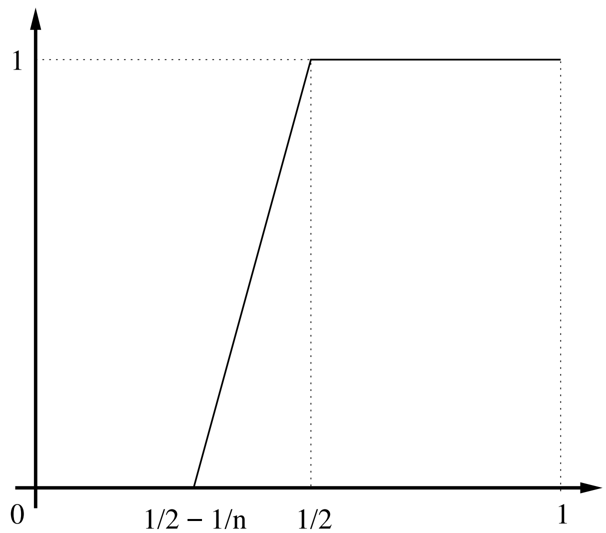

Figure 1: Gráfico das funções f_n

(a) Convença-se essas funções são todas contínuas e, portanto, elementos de $C([0,1])$

(b) Calcule $d_1(f_n, f_m)$ e mostre que a sequência f_n é uma sequência de Cauchy em relação à métrica d_1.

(c) As funções f_n valem 1 no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Fora isso, para cada $x \in [0, \frac{1}{2})$ vale $f_n(x) = 0$ para todo n suficientemente grande. Convença-se que essas fatos implicam que se existir uma função f tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx = 0$ então f deve ser da forma

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{7}$$

(a menos, eventualmente, do ponto $x = 1/2$, onde pode estar indefinida) pois de outro modo ter-se-ia $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \neq 0$. Calcule $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx$ e mostre explicitamente que o limite dessa integral é zero quando $n \to \infty$. Como f não é contínua e, portanto, $C([0,1])$ não é um espaço métrico completo em relação à métrica d_1.

8. Seja M um espaço métrico com uma métrica $d(x,y)$, $x, y \in M$. Prove que

$$d_0(x,y) \equiv \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \tag{8}$$

também define uma métrica em M. Sugestão: para demonstrar a desigualdade triangular pode ser útil provar antes que a função

$$l(x) = \frac{x}{1+x} \tag{9}$$

é crescente na região $x \geq 0$.

9. Os itens abaixo ilustram situações úteis de se ter em mente concernentes à propriedade de completeza.

   (a) Mostre que $M_1 \equiv (0,1)$ não é completo na métrica definida por $d(x,y) \equiv |x-y|$. Para tal, mostre que $a_n \equiv 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ é uma sequência de Cauchy em $M_1 = (0,1)$ em relação à essa métrica, mas mostre que essa sequência não converge nesse conjunto, ou seja, mostre que não existe $x \in M_1$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x, a_n) = 0$.

   (b) Mostre que $M_2 \equiv [0,1]$ é completo na mesma métrica $d(x,y) \equiv |x-y|$. Pode usar o fato que $\mathbb{R}$ é completo nessa métrica.

   (c) Mostre que $d_I(x,y) \equiv \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ define uma métrica em $M_3 \equiv [1,\infty)$.

   (d) Mostre que $M_3 = [1,\infty)$ é completo na métrica $d(x,y) \equiv |x-y|$ mas não na métrica $d_I(x,y)$. Para o primeiro caso, pode usar o fato que $\mathbb{R}$ é completo na métrica d. Para esse último caso, mostre que $a_n \equiv n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em M_3 em relação à métrica d_I, mas que essa sequência não converge nesse conjunto, ou seja, mostre que não existe $x \in M_3$ tal que $\lim_{n\to\infty} d_I(x, a_n) = 0$